RESEARCH ON METHODS OF SOLVING CERTAIN TYPICAL MATHEMATICAL FORMS IN LINEAR ALGEBRA

By NGUYEN THIEN CHI

A DISSERTATION

Presented to the Department of Mathematics
program at Selinus University

Faculty of Life and Earth Science
in fulfillment of the requirements
for the degree of Doctor of Philosophy
in Mathematics

2023

INTRODUCTION

1. Raison du choix du sujet:

Au Vietnam, les étudiants universitaires qui se spécialisent en ingénierie, en économie et en pédagogie (mathématiques, physique et informatique) doivent étudier l'algèbre linéaire. De plus, l'algèbre linéaire apparaît souvent dans les examens d'entrée à la maîtrise, ainsi que dans les examens Olympiade de mathématiques pour les étudiants universitaires. La pratique de l'enseignement montre que la plupart des étudiants ont souvent des difficultés à passer de l'apprentissage de la théorie à la pratique de la résolution de problèmes mathématiques, en particulier, les étudiants ne forment pas une méthode de résolution pour chaque type de mathématiques. Par conséquent, à notre avis, il existe un besoin d'études spécialisées sur les méthodes de résolution pour chaque type de mathématiques en algèbre linéaire, créant ainsi des opportunités pour les étudiants de mieux étudier.

Partant des raisons ci-dessus, nous avons choisi le sujet de recherche suivant pour notre thèse de doctorat en mathématiques:**“Recherche sur les méthodes de résolution de certaines formes mathématiques typiques en algèbre linéaire”** .

2. Objectifs et contenu de recherche de la thèse

Le but de la thèse est de rechercher, de répondre aux questions suivantes:

Question 1. Dans le programme de mathématiques pour les étudiants universitaires, le sujet d'algèbre linéaire a des formes mathématiques typiques qui doivent être étudiées associées aux sujets suivants: Matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espace vectoriel, application linéaire? Quelles méthodes de résolution de problèmes sont recommandées pour résoudre ces problèmes mathématiques typiques?

Question 2. Comment les méthodes proposées pour résoudre des problèmes mathématiques typiques sont-elles présentées?

Question 3. Comment les solutions proposées pour des problèmes mathématiques typiques sont-elles appliquées à la résolution de problèmes similaires et de problèmes avancés?

3. Objet et portée de la recherche

L'objet de recherche de la thèse est d'étudier *la méthode de résolution de problèmes pour les formes mathématiques typiques de l'algèbre linéaire*, dans le programme de mathématiques au niveau universitaire, liés aux sujets suivants: Matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espaces vectoriels, applications linéaires.

Ce sont les principaux sujets que la plupart des étudiants universitaires des majeures techniques, économiques et pédagogiques (mathématiques, physique, informatique) apprennent. De plus, les problèmes d'algèbre linéaire associés aux sujets ci-dessus apparaissent souvent dans les examens d'entrée à la maîtrise, ainsi que dans l'examen de Olympiade de mathématiques pour les étudiants universitaires.

4. La structure de la thèse

Correspondant à l'objectif de recherche de la thèse, outre l'introduction et la conclusion, le contenu principal de la thèse est présenté en 3 chapitres comme suit :

Chapitre 1. Connaissances de base en algèbre linéaire.

Chapitre 2. Quelques types typiques de mathématiques et de méthode de résolution.

Chapitre 3. Quelques types de problèmes avancés.

5. Méthodes de recherche

Pour répondre aux questions ci-dessus, nous utilisons les méthodes de recherche suivantes:

Étudier des documents sur l'algèbre linéaire enseignés dans les programmes universitaires, afin de découvrir les connaissances de base associées aux sujets: Matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espace vectoriel, application linéaire. À partir de là, nous proposons des formes mathématiques typiques et des méthodes de résolution de problèmes à étudier. Les résultats de la recherche sont présentés dans le chapitre 1: *Connaissances de base en algèbre linéaire*.

À partir des résultats de recherche du chapitre 1, nous développons des formes mathématiques spécifiques et des méthodes correspondantes pour les résoudre, ainsi que des problèmes illustratifs. Les résultats de la recherche sont présentés au chapitre 2: *Quelques types typiques de mathématiques et de méthode de résolution*.

Nous appliquons les méthodes de résolution de mathématiques mentionnées au chapitre 2 pour résoudre des problèmes avancés. Les résultats de la recherche sont présentés au chapitre 3: *Quelques types de problèmes avancés* .

Chapitre 1. CONNAISSANCES DE BASE DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons les connaissances de base de l'algèbre linéaire, afin de servir de base au chapitre 2 et de répondre à la question1: *Dans le programme de mathématiques pour les étudiants universitaires, le sujet d'algèbre linéaire a des formes mathématiques typiques qui doivent être étudiées associées aux sujets suivants: Matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espace vectoriel, application linéaire? Quelles méthodes de résolution de problèmes sont recommandées pour résoudre ces problèmes mathématiques typiques?*

Les connaissances présentées dans le chapitre sont référencées dans les documents: [7], [9], [13], [14], [18], [19], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

1.1. Déterminant

1.1.1. Définition de la matrice

- Matrice d'ordre m×n sur □ est un tableau de mn nombres disposés en m lignes et n en colonnes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Avec $a_{ij} \in \square$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Une telle matrice est également notée A = $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ou A = $\left(a_{ij}\right)$. L'élément situé en ligne i et en colonne j de la matrice A est noté a_{ij}ou $\left(A\right)_{ij}$. L'ensemble des matrices d'ordre m×n sur □ est noté $M_{m\times n}(\square)$.

- Avec A, B ∈ $M_{m\times n}(\square)$, nous avons: $A = B \Leftrightarrow \left(A_{ij}\right) = \left(B_{ij}\right), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$

- Matrice d'ordre n×n sur □ est appelée matrice carré d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur □ est noté $M_n(\square)$, au lieu de A = $\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ on écrira A= $\left(a_{ij}\right)_n$. Éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ d'une matrice carrée A = $\left(a_{ij}\right)_n$ se trouve sur une diagonale du carré que nous appelons la diagonale principale de A.

- Matrice des unités d'ordre n sur□, est noté I_n est matrice carrée d'ordre n sur □ dont les coefficients sur la diagonale principale sont tous égaux à 1 et les coefficients restants sont tous égaux à 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Définitions des déterminants

- Soit A une matrice carrée d'ordre 2: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Le déterminant d'ordre 2 de Aest un nombre, le symbole detA (ou $|A|$) défini comme suit:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

- Soit A une matrice carrée d'ordre 3: A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Le déterminant d'ordre 3 de A est un nombre, le symbole detA (ou $|A|$), défini comme suit:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \ (2)$$

Par exemple:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left[(-1)(-2).4 + 2.1.(-1) + 1.0.3\right] - \left[3.(-2).(-1) + 1.0.(-1) + 2.1.4\right] = -8$$

Si la notation S_n est un ensemble des substitutions niveau n, alors les formules (1) et (2) peuvent être réécrites comme suit:

$$\det A = \sum_{f \in S_2} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)}; \quad \det A = \sum_{f \in S_3} s(f)\, a_{1f(1)}\, a_{2f(2)} a_{3f(3)}$$

À partir de là, il est suggéré de définir la déterminant d'ordre n comme suit:

- Soit A une matrice carrée d'ordre n: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Le déterminant d'ordre n de Aest un nombre, symbole detA (ou $|A|$), défini comme suit:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in s_n} s(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} \quad (3)$$

1.1.3. Les propriétés du déterminant

- Propriété 1.

Le déterminant ne change pas au cours de la transposition, c'est-à-dire: $\det A^t = \det A$(A^t: la transposition de la matrice A)

Par exemple:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Remarque: À partir de cette propriété, une proposition de déterminante qui est vraie pour les lignes est également vraie pour les colonnes et vice versa.

- Propriété 2.

Si deux lignes (ou deux colonnes) du déterminant sont permutées, le déterminant change de signe.

Par exemple:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

- Propriété 3.

Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) du déterminant sont multipliés λ alors le nouveau déterminant est égal au déterminant d'origine multiplié par λ.

Par exemple:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Remarque: De cette propriété, nous avons que si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

- Propriété 4.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Supposons que la ligne i de la matrice A puisse être représentée par: $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ avec j=1,2,…,n. Alors, on a:

$$\det A = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}^{'} & a_{i2}^{'} & \cdots & a_{in}^{'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}^{"} & a_{i2}^{"} & \cdots & a_{in}^{"} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Dans lequel, les lignes restantes des 3 déterminants des deux côtés sont exactement les mêmes et sont les lignes restantes de la matrice A. Nous avons également le même résultat pour la colonne.

Par exemple: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Commentaire: À partir de cette propriété, il est possible de construire une méthode pour résoudre *le calcul du déterminant en représentant le déterminant comme la somme des déterminants.*

À partir des propriétés ci-dessus, les propriétés suivantes du déterminant peuvent être déduites:

- Propriété 5.

Le déterminant sera 0 si:

- Avoir deux lignes (deux colonnes) égales ou proportionnelles.
- Il y a une ligne (une colonne) qui est une combinaison linéaire d'autres lignes (une autre colonne).

- Propriété 6.

Le déterminant ne changera pas si:

- Multipliez une ligne (une colonne) par n'importe quel nombre, puis ajoutez à une autre ligne (une autre colonne).
- Ajoutez à une ligne (une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (une autre colonne).

1.1.4. Théorème de Laplace

- Sous-déterminant et complément algébrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n, kest un nombre naturel $1 \le k \le n$. Éléments situés à l'intersection de k n'importe quelle ligne, k toute colonne de A forme une matrice carrée d'ordre kde A. Le déterminant de cette matrice est appelé le déterminant de l'ordre k de la matrice A.

En particulier, étant donné $1 \le i, j \le n$, si nous supprimons des lignes i et des colonnes jde A nous obtiendrons la sous-matrice d'ordre n-1 de A, notée M_{ij}. Alors, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$

est appelé le complément algébrique de l'élément $(A)_{ij}$. ($(A)_{ij}$ est l'élément situé en ligne i, colonne jde la matrice A)

- *Théorème de Laplace*

Soit A une matrice carrée d'ordre n: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Ensuite nous avons:

- En développant le déterminant par la ligne i:

$$\det A = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik}$$

- En développant le déterminant par colonne j:

$$\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \dots + a_{nj}.A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj}$$

- *Remarque*: À partir du contenu du théorème, il est possible de construire une méthode de résolution pour *le calcul du déterminant en développant en lignes (ou colonnes).*

À partir du théorème de Laplace, nous pouvons prouver deux propriétés importantes du déterminant:

- Propriété 1.

Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou triangle inférieur), alors elle detA est égale au produit de tous les éléments de la diagonale principale, c'est-à-dire:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}\dots a_{nn}$$

Commentaire: À partir de cette propriété et des propriétés 2, 3, 6 mentionnées ci-dessus, il est possible de former une méthode pour résoudre *le calcul du déterminant à l'aide de transformations élémentaires.*

- Propriété 2.

Si A,B ce sont des matrices carrées d'ordre n, alors det(AB) = detA.detB .

Prouver:

Supposons qu'il $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$ sont des matrices carrées d'ordre n. Considérant le déterminant d'ordre 2n:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} & -1 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} & 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix}$$

En appliquant le théorème de Laplace, développez le déterminant selon de nla première ligne, on obtient:

$$D=\left(-1\right)^{n^2}.\det A.\det B. \quad (1)$$

Multipliez les lignes $n+1, n+2, ..., 2n$ par $a_{i1},\ a_{i2}, ..., a_{in}$ puis additionnez à la ligne i on obtient:

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} & -1 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} & 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix}$$

Dans lequel: $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Metre: C = $\left(c_{ik}\right)$, on a: C = A.B

En appliquant le théorème de Laplace, en développant le déterminant selon de nla première ligne, on obtient:

$$D=\left(-1\right)^{2(1+2+...+n)}.\det C.\begin{vmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{vmatrix}=\left(-1\right)^{n^2}.\det C \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a: detC = detA.detB, déduire det(A.B) = detA.detB.

Commentaire:

- À partir de cette propriété, il est possible de construire une méthode de résolution: *Détermination du déterminant par la méthode de représentation déterminant en tant que produit de déterminants.*

- Dans certains cas, appliquer les propriétés du déterminant, transformer le développement du déterminant par ligne ou par colonne pour représenter le déterminant à calculer par des déterminants d'ordre plus petit de même forme. À partir de là, nous obtiendrons la formule de récursivité. Par conséquent, *le déterminisme par méthode inductive* doit être étudié.

- *En résumé* :

Sur la base des connaissances de base sur les déterminants, nous proposons les méthodes de résolution de problèmes suivantes à étudier:

- *Calculer le déterminant en utilisant l'expansion de ligne (ou de colonne).*
- *Déterminer le déterminant à l'aide de transformations élémentaires.*
- *Déterminer le déterminant par induction.*
- *Déterminer le déterminant en représentant le déterminant par la somme des déterminants.*
- *Déterminer le déterminant par la méthode de représentation du déterminant en tant que produit de déterminants.*

1.2. Rang de la matrice

1.2.1. Définition du rang d'une matrice

Soit A une matrice d'ordre non nul $m \times n$.Le rang de la matrice A est un nombre naturel r, $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, vérifiant les conditions suivantes:

- Il existe au moins un sous-déterminateur d'ordre r de la matrice A qui est non nul.
- Tous les sous-déterminants d'ordre supérieur r(le cas échéant) de la matrice A sont égaux à 0.

Autrement dit, le rang de la matrice $A \neq 0$ est l'ordre le plus élevé des sous-déterminants non nuls de la matrice A. Le rang de la matrice A est noté *rangA*.

Commentaire: À partir de la définition du rang de la matrice, on peut former une méthode solution mathématique pour trouver le rang de la matrice: *Trouver le rang de la matrice par la méthode des déterminants* .

1.2.2. Propriétés de base du rang d'une matrice

- Propriété 1 **.**

Le rang de la matrice ne change pas lors de la transposition, c'est-à-dire $\text{rang}A^t = \text{rang}A$.

- Propriété 2 **.**

Si A est une matrice carrée d'ordre nalors:

$$rang\ A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$
$$rang\ A < n \Leftrightarrow \det\mathrm{A} = 0$$

- Propriété 3 **.**

Si A et B sont des matrices du même ordre, alors: $rang\left(A+B\right) \leq rang\ A + rang\ B$

1.2.3. La matrice en échelle

- **Définir**

Matrice A non nul d'ordre $m \times n$ est dite la matrice en échelle s'il existe des nombres naturels r , $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$ satisfaisant les conditions suivantes:

1. r la première ligne de A est non nulle. Les Lignes à partir de $r+1$ (le cas échéant) sont toutes égaux à 0.
2. Considérez la ligne k avec $1 \leq k \leq r$. Si $\left(A\right)_{ki_k}$ le premier élément à gauche (de gauche à droite) est non nul de la ligne kalors nous devons avoir $i_1 < i_2 < ... < i_r$.

Les éléments $\left(A\right)_{ki_k}$ sont appelés éléments marqués de la matrice A. Les colonnes contenant les éléments marqués (colonnes $i_1, i_2, ..., i_r$) sont appelées colonnes marquées de la matrice A. Ainsi, la condition (2) peut être reformulée comme suit: Si on va de la ligne du haut vers le bas, les éléments marqueurs doivent se déplacer progressivement vers la droite. Par conséquent, la matrice en échelle a la forme suivante:

i_1 i_2 i_r

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cccccc} 0...0 & \left(A\right)^*_{1i_1} ... & ..... & ... & ...... & ... \\ 0...0 & 0...0 & \left(A\right)^*_{2i_2} & ... & ...... & ... \\ ..... & ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ ..... & ..... & ..... & ... & \left(A\right)^*_{ri_r} & ... \\ 0...0 & 0...0 & 0.... & ... & 0... & ...0 \\ ..... & ...... & ..... & ... & ..... & ... \\ 0...0 & 0...0 & 0.... & ... & 0... & ...0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \\ (r) \\ (r+1) \\ \\ (m) \end{array}$$

Nous avons les observations importantes suivantes:

Si Aest une matrice en échelle, alors le nombre r dans la définition est rangA .

Prouver.

- Il est possible de montrer qu'un sous-déterminateur non nul d'ordre r de A est le déterminant D_r produit par r le premier de ligne et r de marqueur colonne $i_1, i_2, ..., i_r$.

$$D_r = \begin{vmatrix} (A)_{1i_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (A)_{2i_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (A)_{ri_r} \end{vmatrix} = (A)_{1i_1}(A)_{2i_2}\ldots(A)_{ri_r} \neq 0$$

- De plus, les sous-déterminateurs d'ordre r+1 de A sont tous générés par r+1une ligne, donc au moins une ligne est nulle. Ils sont donc tous égaux à 0.

Exemples de matrices en échelle:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^* \end{bmatrix}$$

Les matrices A, B sont toutes des matrices en échelles, et ont rangA = 4 (égal au nombre de lignes non nulles de A), rangB = 5 (égal au nombre de lignes non nulles de B).

1.2.4. Transformation élémentaire sur des matrices

- Les trois transformations suivantes sont appelées transformations élémentairessur les lignes de la matrice:

1. En échangeant les deux lignes.
2. Multiplier une ligne par un nombre non nul.
3. Multipliez une ligne par n'importe quel nombre, puis ajoutez une autre ligne.

De même, en remplaçant les lignes par des colonnes, nous avons trois transformations élémentaires sur les colonnes de la matrice.

- *Commentaire:*

- Les transformations élémentaires ne changent pas le rang de la matrice.
- Toute matrice non nulle peut être donner à la forme échelle après un nombre fini de transformations élémentaires sur la ligne.

Ainsi, pour trouver le rang d'une matrice A, on utilise des transformations élémentaires pour donner A sur la forme de l'échelle, le rang de Aest égal au rang de la matrice en échelle, et nous savons déjà que le rang de la matrice en échelle principale est égal à son nombre de lignes non nulles. À partir de ce résultat, nous pouvons construire une méthode de résolution de problème: *Trouver le rang de la matrice en utilisant des transformations élémentaires.*

En résumé: Sur la base des connaissances de base sur le rang de la matrice, nous proposons les méthodes de résolution de problèmes suivantes à étudier:

- *Trouver le rang d'une matrice en utilisant la méthode des déterminants.*
- *Trouver le rang d'une matrice à l'aide de transformations élémentaires.*

1.3. Matrice inversible

1.3.1. Les notions de base

Sachant que A est une matrice carrée d'ordre n , A est dite inversible s'il existe une matrice carrée B d’ordre n telle que AB = BA = I_n (1) (I_n est une matrice unitaire d'ordre n). Si A est inversible, alors la matrice B vérifiant (1) est unique et B est appelée matrice inverse, notée A^{-1}. Ainsi, nous avons toujours: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

1.3.2. Propriétés

- A est réversible $\Leftrightarrow$ $det A \neq 0$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

1.3.3. Théorèmes

- **Théorème 1.**

Considérez la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$

Si det$A \neq 0$ alors la matrice A, a l'inverse A^{-1}, calculé par la formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Où A_{ij} est le complément algébrique de l'élément situé dans la ligne i de colonne j de la matrice A.

Prouver .

Définir: $b_{jk} = \frac{A_{kj}}{\det A}, \quad k, j = 1,2,...,n$ et mettre à la matrice carrée d’ordre n: B = (b_{ij}).

Nous avons: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$

Si i = k alors $c_{ik} = \frac{1}{\det A}.\det A = 1.$

Si i $\neq$ k alors $c_{ik} = \frac{1}{\det A}.0 = 0$. Donc $(c_{ik}) = I_n$ (I_n est la matrice d'unité d’ordre n)

Donc, AB = I_n, de même nous avons: BA = I_n, déduire A^{-1}= B.

Ainsi: $$A^{-1}=\left(b_{ij}\right)=\frac{1}{\det A}.A_{ji}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Commentaire: À partir du contenu du Théorème 1, il est possible de former une méthode de résolution pour la forme mathématique:*Trouvez la matrice inverse en utilisant le déterminant.*

- **Théorème 2.**

Si les mêmes transformations élémentaires sont effectuées sur les lignes de la matrice A, det$A\neq 0$ et la matrice unitaire $I_n$mais Atransformer $I_n$alors $I_n$transformer en A^{-1} . Cette assertion est toujours vraie si les lignes sont remplacées par des colonnes.

Commentaire: À partir du contenu du Théorème 2, il est possible de construire une méthodes solution pour la forme mathématique: *Trouver la matrice inverse par la méthode basée sur les transformations élémentaires.*

- *En résumé:* Sur la base des connaissances de base sur les matrices inverses, nous proposons les méthodes de résolution de problèmes suivantes qui doivent être étudiées:

- *La méthode pour trouver la matrice inverse en utilisant le déterminant.*
- *La méthode pour trouver la matrice inverse en s'appuyant sur des transformations élémentaires.*

1.4. Système d'équations linéaires

1.4.1. Définir

Le système d'équations linéaires est constitué m d'équations, n les inconnues sont le système d'équations:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Là-dedans $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les inconnues:

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ sont appelés coefficients, b_i sont appelés coefficients libres. Matrices:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right], B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

C'est ce qu'on appelle la matrice des coefficients, la matrice augmentée, la matrice des coefficients de liberté (colonne des coefficients libres), la matrice inconnue (la colonne des inconnues) du système d'équations ci-dessus. Le système d'équations peut être réécrit sous forme matricielle $A\,x = B$.

Commentaire: Si nous effectuons des transformations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires, nous obtenons un nouveau système d'équations équivalent au système d'équations donné.

1.4.2. Le système d'équations de Cramer.

- **Définition:**

Un système d'équations linéaires (1) est appelé système de Cramer si $m = n$ (c'est-à-dire que le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues) et $\det A \neq 0$.

- **Théorème de Cramer**

Pour le système d'équations de Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2)$$

Là-dedans: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ Est une matrice de coefficients. Le système d'équations de Cramer a une unique solution donnée par la formule: $x = A^{-1}B$, c'est-à-dire $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$ où A_j est la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant la colonne j de A par la colonne $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Prouver.

Nous avons: Parce que $\det A \neq 0$, déduire existter A^{-1}. Le système d'équations (2) est réécrit sous forme matricielle: $A\,x = B$.

Avec $x = A^{-1}B$. On a: $A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right).B = B$ déduire $x = A^{-1}B$ être la solution du système d'équations (2). Nous avons: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$, Où A_{ij} est le complément algébrique de l'élément dans la ligne i, de colonne j de la matrice A. Donc,

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + \dots + A_{n1}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

Ainsi: $$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

- *Prouver l'unicité:*

Supposons que le système d'équations: A x =B, a deux solutions x et y pour que A x = B, A y =B. Nous avons: $Ax - Ay = 0 \Rightarrow A\left(x - y\right) = 0$

Donc: $$A^{-1}A\left(x - y\right) = A^{-1}.0 = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

Ainsi: $$x = y.$$

Donc, le système d'équations (2) a une solution unique.

Commentaire:

- À partir des résultats $x =$ $A^{-1}B$ est la seule solution du système d'équations (2), nous pouvons construire une méthode de résolution pour la forme mathématique: *Trouver la matrice inverse en résolvant le système d'équations.*
- D'après le résultat, le système d'équations de Cramer a une solution unique donnée par la formule: $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, peut former une méthode de solution pour la forme mathématique: *Résoudre et argumenter le système d'équations par la méthode des déterminants*.

1.4.3. Théorème de Cronecker-Capelly

Soit le système d'équations linéaires générales (1), A et $\overline{A}$ la matrice de coefficients et la matrice augmentée, respectivement. Alors:

- Si rang A < rang $\overline{A}$, alors le système d'équations (1) n'a pas de solution.
- Si rang A = rang $\overline{A} =$ r alors le système de l'équation (1) a une solution. Suite:

+ Si $r = n$ alors le système d'équations (1) a une solution unique.

+ Si $r < n$ alors le système d'équations (1) a une infinité de solutions qui dépendent $n-r$ des paramètres.

- *Commentaire*: À partir du contenu du théorème, une méthode de résolution de la forme mathématique peut être formée: *Résoudre et argumenter le système d'équations linéaires par la méthode de transformation élémentaire.*
- *En résumé*: Sur la base des connaissances de base sur le système d'équations linéaires, nous proposons les méthodes de résolution de problèmes suivantes à étudier:

- *Résoudre et argumenter le système d'équations linéaires par la méthode de transformation élémentaire.*
- *Résoudre et argumenter un système d'équations linéaires par la méthode des déterminants.*
- *La méthode pour trouver la matrice inverse en résolvant un système d'équations.*

1.5. Espace vectoriel

1.5.1. Définition et propriétés de l'espace vectoriel

1.5.1.1. Définir

Le symbole $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, V est tout autre ensemble $\varnothing$ et V est appelé l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (chaque élément de V est appelé un vecteur) si dans V il y a deux opérations:

- Addition de 2 vecteurs, c'est-à-dire pour chaque paire de vecteurs $\alpha, \beta \in V$ déterminer une somme vectorielle $\alpha + \beta \in V$.
- Multiplication scalaire d'un nombre par un vecteur, c'est-à-dire pour chacun $a \in \mathbb{R}$ et le vecteur $\alpha \in V$ détermine un vecteur produit $a\alpha \in V$.

De plus,l'addition et la multiplication ci-dessus doivent satisfaire les 8 conditions suivantes:

+ Addition associatif, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{V}: (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$

+ Addition commutative, pour tous $\alpha, \beta \in V: \alpha+\beta = \beta+\alpha$

+ Le vecteur $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ est appelé le vecteur zéroet est généralement désigné par O.

$\alpha + O = O + \alpha = \alpha$ pour tout $\alpha \in V$.

+ Pour tout $\alpha \in V$, il existe un vecteur $-\alpha \in V$ de la propriété: $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = O$.

+ Multiplication distributive avec addition, pour tous $a \in \mathbb{R}$ et vecteurs $\alpha, \beta \in V$:

$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$

+ Multiplication distributive avec addition, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, pour tous les vecteurs $\alpha \in V$:

$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

+ Multiplication associative, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, pour tous les vecteurs $\alpha \in V$: $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

+ $1.\alpha = \alpha$, pour tous les vecteurs $\alpha \in V$

Ainsi, afin de vérifier si l'ensemble V avec les deux opérations d'addition et de multiplication scalaires est un espace vectoriel, nous devons vérifier s'ils satisfont aux 8 conditions ci-dessus.

1.5.1.2. Propriétés de base

- Les vecteurs O et contre-vecteurs $(-\alpha)$ sont uniques.
- Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in V$, si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ alors $\beta = \gamma$.
- $0.\alpha = O$, pour tout $\alpha \in V$, $a.O = O$, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
- $(-1).\alpha = -\alpha$, pour tout $\alpha \in V$.
- Si $a.\alpha = O$ alors $a = 0$ ou $\alpha = O$
- Si $\alpha \neq O$ alors $a\alpha = b\alpha \Leftrightarrow a = b$
- $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$, pour tous $a \in \mathbb{R}, \alpha \in V$.

1.5.2. Linéairement indépendant, linéairement dépendant

1.5.2.1. Définir

Soit V un espace vectoriel, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est un système vectoriel de V .

1) S'il y a des chiffres $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ pour que $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$

(C'est-à-dire que l'équation vectorielle: $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \beta$ a une solution) alors nous disons que le vecteur $\beta \in V$ est *représenté linéairement* à travers le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ou disons β est une *combinaison linéaire* du n vecteur donné.

À partir de la définition ci-dessus, il est possible de construire une méthode de résolution pour la forme mathématique typique: *Prouver qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système (fini) donné de vecteurs.*

2) Système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est appelé système vectoriel *linéairement dépendant* s'il existe $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = 0$. Autrement dit, l'équation vectorielle $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = O$ a une solution différente $(0,...,0)$.

3) Système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est appelé système vectoriel *linéairement indépendant* s'il n'est pas linéairement dépendant. Autrement dit: Système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est appelé un système vectoriel linéairement indépendant si et seulement si l'équation vectorielle $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = O$ a une solution unique est: $(0,...,0)$.

Le contenu des deux définitions ci-dessus est la base pour former la méthode de résolution pour la forme mathématique: *Prouver qu'un système (fini) de vecteurs est linéairement indépendant ou linéairement dépendant.*

1.5.2.2. Propriétés de base

- Système contenant le vecteur nultoujours linéairement dépendant.
- Un système consiste en un vecteur de dépendance linéaire lorsque ce vecteur est égal à O, un système de deux vecteurs linéairement dépendants si et seulement si les deux vecteurs sont proportionnels.
- Si un système vectoriel est linéairement indépendant, alors tous ses sous-systèmes sont également linéairement indépendants.
- Un système de vecteurs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est linéairement dépendant si et seulement s'il existe un vecteur dans le système qui peut être représenté linéairement par le reste des vecteurs du système.
- Si le système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est linéairement indépendant, alors le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta$ est linéairement indépendant si et seulement si β la linéarité ne peut pas être exprimée à travers le système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

1.5.3. Rang d'un système vectoriel

1.5.3.1. Système vectoriel équivalent

Dans l'espace vectoriel V pour deux systèmes vectoriels:

$$
\begin{aligned}
(\alpha)&: \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \\
(\beta)&: \quad \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n
\end{aligned}
$$

On dit système (α) peut être exprimé linéairement à travers le système (β) si chaque vecteur du système (α) sont tous exprimés linéairement à travers le système (β). On dit que le système (α) est équivalent au système (β) (symbole $(\alpha) \sim (\beta)$) si le système (α) peut être exprimé linéairement à travers le système (β) et vice versa.

1.5.3.2. Sous-système linéairement indépendant maximal d'un système vectoriel

Dans l'espace vectoriel V pour le système vectoriel $(\alpha): \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Sous-système $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ du système (α) est appelé *le sous-système maximum linéairement indépendant* du système (α) si $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ linéairement indépendants et tous les vecteurs α_i du système (α) peut être exprimé linéairement à travers le sous-système $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$.

D'après la définition, *nous avons immédiatement un sous-système linéairement indépendant d'un système vectoriel équivalent à ce système vectoriel.*

1.5.3.3. Lemme de base de l'indépendance linéaire

Dans l'espace vectoriel V pour deux systèmes vectoriels:

$$(\alpha): \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$$
$$(\beta): \quad \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$$

Si le système (α) linéairement indépendants et linéairement exprimables à travers le système (β) alors $m \leq n$ et nous pouvons remplacer mles vecteurs du système (β) sont égaux aux vecteurs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ du système (α) pour obtenir le nouveau système équivalent à (β). D'après le lemme de base, *nous avons immédiatement deux systèmes de vecteurs linéairement indépendants équivalents, le nombre de vecteurs est égal.*

1.5.3.4. Définition rang du système vectoriel

Dans l'espace vectoriel V, pour le système vectoriel $(\alpha): \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$

Système (α) Il peut y avoir de nombreux sous-systèmes indépendants linéaires maximaux différents. Cependant, tous les sous-systèmes indépendants au maximum linéaires du système (α) sont équivalents entre eux (parce qu'ils sont équivalents au système (α)). Ainsi, selon le lemme ci-dessus, tous les sous-systèmes au maximum indépendants ont un nombre égal de vecteurs. Ce nombre s'appelle *le rang du système vectoriel* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$; symbole: $rang\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$. Nous avons donc: $rang\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ *égal au nombre de vecteurs du sous-système maximal linéairement indépendant du système* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$.

À partir de cette définition, il est possible de construire une méthode de résolution pour la forme mathématique:*Trouver le rang, le sous-système maximum linéairement indépendant d'un système vectoriel* .

1.5.4. La base, le nombre de dimensions de l'espace vectoriel

1.5.4.1. Base

Soit V un espace vectoriel, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ qui est un système vectoriel de V.

- Un système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est dit *générateur* de V si tous les vecteurs $\beta \in V$ sont *linéairement exprimables* à travers le système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.
- Un système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est dit base d'un espace vectoriel V s'il est générateur de V et linéairement indépendant.

- D'après la définition, deux bases quelconques de V sont équivalentes et linéairement indépendantes. Par conséquent, d'après le théorème fondamental, ils ont un nombre égal de vecteurs. Ce nombre est appelé la dimension de V, notée $\dim V$. Donc par définition:

dimV est égal au nombre de vecteurs de toute base de V.

- Un espace vectoriel dont la base est constituée d'un nombre fini de vecteurs est appelé un espace vectoriel de dimension finie. Un espace vectoriel non nul et sans base constitué d'un nombre fini de vecteurs est appelé un espace vectoriel de dimension infinie. L'algèbre linéaire traite principalement des espaces de dimension finie.

1.5.4.2. La propriété de base de l'espace vectoriel de dimension finie

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, dimV = n . Alors:

(a) Tout système vectoriel avec plus de n vecteur est linéairement dépendant.

(b) Tout système à n vecteurs linéairement indépendants est une base de V.

(c) Tout système dont n le vecteur est un générateur de V est une base de V.

(d) Tout système linéaire indépendant du vecteur kpeut ajouter n-kvecteur pour être la base de V.

Commentaire: À partir des propriétés (b), (c) si elles sont connues dimV = n, pour prouver qu'un système n vectoriel est la base de V, il suffit de prouver que le système est linéairement indépendant ou qu'il s'agit d'un système générateur.

1.5.4.3. Coordonnées du vecteur dans la base

- **Définir**

Donner V est un espace vectoriel ndimension (dimV = n) et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est une base de V

Avec $x \in V$, alors x ne peut s'écrire que sous la forme: $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n,\ a_i \in \square$

L'ensemble des nombres $(a_1, a_2, ..., a_n)$ s'appelle les coordonnées de x dans la base (α),

notation: $x/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ou $[x]/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

- **Matrice de changement de base**

Dans l'espace vectoriel V pour 2 bases:

$$(\alpha): \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$
$$(\beta): \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$$

Ensuite, les vecteurs $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ peuvent s'écrire de manière unique:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n \\ .... \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

Matrice: $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Est a matrice convertie de la base (α) en (β).

À partir de la définition, nous pouvons former une méthode solution pour la forme mathématique:*Trouvez la matrice qui convertit d'une base à une autre*.

1.5.5. Espace sous-vectoriel

1.5.5.1. Définir

Un ensemble $W \neq \varnothing$ d'espace vectoriel V sur $\square$ est appelé un sous-espace vectoriel (ou sous-espace) de V si W stable pour l'addition vectorielle et la multiplication scalaire sur V, c'est-à-dire $x + y \in W$ et $\lambda x \in W$ pour tout $x, y \in W, \lambda \in \square$. À partir de la définition de sous-espace vectoriel, nous obtenons le résultat suivant.

1.5.5.2. Critères des espaces sous-vectoriels

Soit $W \neq \varnothing$ un sous-ensemble de l'espace vectoriel V sur $\square$. Alors c'est W un sous-espace de V si et seulement si $x + \lambda y \in W; \forall x, y \in W, \forall \lambda \in \square$.

À partir de ce résultat, il est possible de former une méthode de résolution pour la forme mathématique: *Considérer si un ensemble donné est un sous-espace ou non*.

1.5.5.3. Le nombre de dimensions du sous-espace

Concernant le nombre de dimensions du sous-espace vectoriel, on a le théorème suivant:

Si U est un sous-espace vectoriel de V, alors $\dim U \leq \dim V$ et $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

1.5.5.4. Certains des sous-espaces

- **Sous-espace généré par un système vectoriel**

Soit V un espace vectoriel, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ un système vectoriel de V. On définit:

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle = \{ x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n | a_i \in \square \} \subset V$$
$$(x \in V \Leftrightarrow \exists a_i \in \square : x = a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_n)$$

En utilisant le critère de sous-espace vectoriel, nous avons $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$ un sous-espace vectoriel de V. Ce sous-espace est appelé un sous-espace de V généré par le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

D'après la définition, nous avons: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est une génération du sous-espace vectoriel $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$. Donc, *chaque sous-système linéairement indépendant au maximum d'un système* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *est un générateur,et est donc la base de l'espace sous-vectoriel* $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$.

À partir de ce résultat, nous allons construire une méthode de résolution pour la forme mathématique:*Trouver la base et la dimension du sous-espace généré par un système vectoriel.*

- **Sous-espace de solutions d'un système d'équations linéaires homogènes**

Soit un système d'équations linéaires homogènes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Chaque solution du système d'équations (I) peut être considérée comme un vecteur dans l'espace $\mathbb{R}^n$. En utilisant des critères de sous-espace vectoriel, prouver que l'ensemble des solutions du système d'équations (I) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Ce sous-espace est appelé le *sous-espace des solutions du système d'équations (I).*

Ainsi, il est nécessaire d'étudier la méthode de résolution de la forme mathématique: *Trouver la base et le nombre de dimensions du sous-espace racine d'un système d'équations linéaires homogènes.*

Si A est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$, alors A peut être considéré comme l'espace des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à n quelques inconnues.

Prouver. Supposons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ être la base de A, puis $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$.Un vecteur $x = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ si et seulement si l'équation vectorielle $x = x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m \; (x_i \in \mathbb{R})$ a une solution, si et seulement si $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ c'est une solution d'un système homogène d'équations linéaires.

Ce résultat, comme base pour former une méthode de résolution mathématique: *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur appartienne à un sous-espace généré par un système vectoriel.*

- **Espace d'intersection et espace total**

En utilisant des critères d'espace sous-vectoriel, nous pouvons prouver les résultats suivants:

- Si A et B sont des sous-espaces vectoriels de V, alors $A \cap B$ c'est un sous-espace vectoriel de V.

En général, l'intersection d'une famille arbitraire de sous-espaces vectoriels de V est un sous-espace vectoriel de V.

- Soient A, B des sous-espaces vectoriels de V, on définit:

$$A+B=\left\{x=\alpha+\beta \middle| \alpha \in \mathrm{A}, \beta \in \mathrm{B}\right\} \subset V$$
$$\left(x \in A+B \Leftrightarrow x=\alpha+\beta ; \alpha \in A, \beta \in B\right)$$

Alors, A + B est un sous-espace de V appelé l'espace somme des sous-espaces A et B.

Commentaire:

Soient A et B des sous-espaces vectoriels de V. Si $A=\langle\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle, B=\langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle$ alors: $A+B=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$.

Prouver.

Car A$\subset$ A+B, B$\subset$ A+B, déduire $\alpha_i, \beta_j \in$A+B.

Donc, on a: $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \subset A+B. (1)$

Inversement, si $x \in A+B$ alors $x=y+z$, où $y \in A, z \in B$.

$y \in A \Rightarrow y=a_1\alpha_1+\ldots+a_m\alpha_m, z \in B \Rightarrow z=b_1\beta_1+\ldots+b_n\beta_n$ (avec $a_i, b_j \in \mathbb{R}$)

Ainsi: $x=y+z=a_1\alpha_1+\ldots+a_m\alpha_m+b_1\beta_1+\ldots+b_n\beta_n \in\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$

Alors: $A+B \subset\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle. (2)$

De (1) et (2), déduire: $A+B=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$.

Ainsi: *Si* $A=\langle\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\rangle, B=\langle\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\rangle$ *alors* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *est un générateur de* $A+B$ *et donc un sous-système linéairement indépendant du système vectoriel* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *qui est à la base de A+B.*

À partir des résultats ci-dessus peut être formé une méthode de résolution pour la forme mathématique: *Trouver la base et le nombre de dimensions des sous-espaces d'intersection et de somme.*

Commentaire: Sur la base des connaissances de base sur les espaces vectoriels, nous proposons les méthodes de résolution de problèmes suivantes à étudier :

- *Démontrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système (fini) donné de vecteurs.*
- *Prouver qu'un système (fini) de vecteurs est linéairement indépendant ou linéairement dépendant.*

- *Trouvez le sous-système linéairement indépendant maximal d'un système vectoriel.*
- *Trouvez la matrice qui convertit d'une base à une autre.*
- *Considérez si un ensemble donné est un sous-espace ou non.*
- *Trouver la base et la dimension du sous-espace généré par un système vectoriel.*
- *Trouver la base et la dimension du sous-espace racine d'un système d'équations linéaires homogènes.*
- *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur appartienne à un sous-espace généré par un système vectoriel.*
- *Trouvez la base et le nombre de dimensions des sous-espaces d'intersection et de somme.*

1.6. L'application linéaire

1.6.1. Définir

Donnez V et Usont deux espaces vectoriels.

Une application $f:V \to U$ est dite une application linéaire si f les deux propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) Pour tous $x, y \in V: f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}, x \in V: f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Une application linéaire $f:V \to V$ est appelée une transformation linéaire de V.

Commentaire: De la définition ci-dessus, nous avons les résultats suivants:

Donnez V et Usont deux espaces vectoriels.

L'application $f:V \to U$ est une application linéaire si et seulement si pour tout $x, y \in V$,pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ (*)

Prouver.

- Supposons qu'il f s'agit d'une application linéaire.

Alors, pour tout $x, y \in V$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a:

$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y)$ (à la définition de (i))

$= \lambda f(x) + \mu f(y)$ (à la définition de (ii))

- Supposer f satisfaire (*), on a:

Avec $\lambda = \mu = 1,$ nous avons $(i): f(x+y) = f(x) + f(y)$

Avec $\lambda = \lambda, \mu = 0,$ nous avons $(ii): f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Ainsi, à partir de ce résultat, il est possible de construire une méthode de résolution pour une forme mathématique typique: Prouver qu'une application donnée est linéaire (ou non linéaire).

1.6.2. Les propriétés de base de l’application linéaire

Soit U, V des espaces vectoriels, et $f : V \to U$ soit une application linéaire. Ensuite nous avons:

- $f(0_V) = 0_U$, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, pour tout $\alpha \in V$.
- S'il $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ s'agit d'un système linéairement dépendant dans V alors $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ un système linéairement dépendant dans U.
- $rang\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \geq rang\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)\}$. Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in V$

1.6.3. Théorème fondamental de l’application linéaire

Soit V un espace vectoriel ndimension (dimV = n), $(\alpha) : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ qui est une base arbitraire de V. U un espace vectoriel arbitraire et $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ d'un système vectoriel arbitraire de U. Alors, il n'existe qu'une seule application linéaire f qui satisfait $f(\alpha_i) = \beta_i$ toutes i = 1,2,3,…,n.

Prouver.

Pour tout $x \in V$, existence $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ telle que $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$.

Nous construisons l’application f comme suit:

$$\begin{aligned} f &: V \to U \\ x &\mapsto f(x) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_n\beta_n \end{aligned}$$

- *Montrer qu'il f s'agit d'une application linéaire*

Supposons: $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$, $y = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i \in V$. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(\lambda x + \mu y) = f\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i)\alpha_i\right] = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i)\beta_i$$

$$= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\beta_i\right) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Donc: f est une application linéaire.

- *Prouver l'unicité*

Supposons qu'il existe une application linéaire $g : V \to U$ telle que $g(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Alors: pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$, nous avons:

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i = f(x)$$

Ainsi: $g = f$.

De ce théorème, on voit qu'une application parfaitement linéaire est déterminée lorsque l'image d'une base est connue. Par conséquent, sur la base du contenu du théorème, il est possible de construire une méthode de résolution pour une forme mathématique typique: *Déterminer l'expression d'une application linéaire en connaissant l'image d'une base à travers cette application.*

1.6.4. Matrice d'une application linéaire

- **Définir.**

Soient V et Udes espaces vectoriels, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \left(\alpha\right)$qui sont les bases de V, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \left(\beta\right)$ est la base de U. Parce que $f\left(\alpha_i\right) \in U$, donc $f\left(\alpha_i\right)$on peut l'exprimer linéairement à travers la base $\left(\beta\right)$, on a:

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha_1\right) &= a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1m}\beta_m \\
f\left(\alpha_2\right) &= a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2m}\beta_m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f\left(\alpha_n\right) &= a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + ... + a_{nm}\beta_m
\end{aligned}$$

Matrice $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Est appelée la matrice de *f* dans la paire de bases$\left(\alpha\right), \left(\beta\right)$et le symbole est $A_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$. Cas particulier, lorsque *f* est une transformation linéaire de V, $f: V \to V$ et $\left(\beta\right) \equiv \left(\alpha\right)$ alors la matrice de *f* dans la paire de bases $\left(\alpha\right), \left(\alpha\right)$est appelée la matrice de *f* dans la base $\left(\alpha\right)$et est notée $A_{f/_{(\alpha)}}$.

À partir du contenu de la définition ci-dessus, il est possible de former une méthode de résolution pour une forme mathématique typique: *Trouver la matrice d'une application linéaire dans une paire de bases donnée.*

1.6.5. Coordonner l'expression de l'application linéaire

Soient U, V des espaces vectoriels, et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \left(\alpha\right)$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \left(\beta\right)$sont les bases de V et U, soit $f: V \to U$sont des applications linéaires, respectivement.

$A = A_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$ est la matrice de *f* dans la paire de bases$\left(\alpha\right), \left(\beta\right)$. Pour tout vecteur $x \in V$, Supposons: $x/_{(\alpha)} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $f\left(x\right)/_{(\beta)} = \left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$

Ensuite, nous avons la formule suivante appelée l'expression coordonnée de l'application linéaire f :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si nous signons $[x]/_{(\alpha)}$ est les coordonnées du vecteur dans la x base (α) colonnaire, alors la formule ci-dessus est réécrite comme suit: $\left[f(x)\right]/_{(\beta)} = A_{f/_{(\alpha),(\beta)}}.[x]/_{(\alpha)}$

Le cas particulier, lorsqu'il $f : V \to V$ s'agit d'une transformation linéaire, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ (\alpha)$ est la base de V, on a: $\left[f(x)\right]/_{(\alpha)} = A_{f/_{(\alpha)}}.[x]/_{(\alpha)}$

1.6.6. Noyau et image de l'application linéaire

Soit V, U des espaces vectoriels, $f : V \to U$ qui est une application linéaire.

- Symbole: $Kerf = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$

Ensuite, sur la base du critère de sous-espace vectoriel, nous pouvons prouver $\ker f$ que le sous-espace vectoriel de V est appelé *la noyau* de l'application linéaire f .

- La notation: $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in V\} \subset U$, $\operatorname{Im} f$ est aussi un sous-espace vectoriel de U, appelé *l'image* de l'application linéaire f .

Commentaire:

$a)$ Pour l'application linéaire $f : V \to U$.

Choisissez la base $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ (\alpha), \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\ (\beta)$ de V et U.Ensuite, nous avons:

$$\left[f(x)\right]/_{(\beta)} = A_{f/_{(\alpha),(\beta)}}.[x]/_{(\alpha)}$$

Donc, $x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[f(x)\right]/_{(\beta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A.[x]/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$

Ainsi, $x \in Kerf$ si et seulement si les coordonnées de x dans la base $(\alpha)\left([x]/_{(\alpha)}\right)$ sont les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes (*) (avec $A = A_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$). Ce résultat est la base pour pouvoir construire une méthode de résolution pour une forme mathématique typique: *Trouver la base de* $Kerf$.

$b)$ Pour l'application linéaire $f : V \to U$.

Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ la génération de V alors $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ la génération de $\operatorname{Im} f$.

Prouver .

Pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in V$ à $y = f(x)$.

Parce que $x \in V$ donc exister $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ pour $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$. Alors:

$$y = f(x) = f(a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + ... + a_n f(\alpha_n)$$

Ainsi: $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ la génération de $\operatorname{Im} f$.

Donc, pour trouver la base de $\operatorname{Im} f$, on trouve la base $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de V, d'après la remarque ci-dessus, $\operatorname{Im} f = \langle f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n) \rangle$.Donc,que le sous-système maximum linéairement indépendant du système $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ est la base de $\operatorname{Im} f$. À partir de ce résultat, une méthode de résolution du formulaire mathématique sera formée: *Trouver la base de* $\operatorname{Im} f$.

Ainsi, à partir des deux commentaires ci-dessus, une méthode de résolution pour la forme mathématique typique sera formée:*Trouvez la base et la dimensionnalité du noyau et de l'image d'une application linéaire.*

1.7. Vecteurs propres, valeurs propres des matricielles et transformations linéaires

1.7.1. Vecteurs propres, valeurs propres de la matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n $(A \in M_n(\mathbb{R}))$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Alors:

- Polynômes de degré nde variables λ : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda_1 + a_0$$

Appelons-le *le polynôme caractéristique* de la matrice A. Là-dedans, I = $I_n$est la matrice d'unité d'ordre n.

- Solutions réelles de polynômes caractéristiques $P_A(\lambda)$ est appelée *la valeur propre* de la matrice A .

- Si λ_0 est une valeur propre de A, alors $\det(A-\lambda_0 I)=0.$ Le système d'équations est homogène:

$$(A-\lambda_0 I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il existe a une infinité solutions.

- L'espace des solutions du système d'équations (1) est appelé *sous-espace propre* de la matrice Acorrespondant aux valeurs propres λ_0.

- Les vecteurs non nuls solutions du système d'équations (1) sont appelés *vecteurs propres* de la matrice A correspondant aux valeurs propres λ_0.

- Les vecteurs formant une base de l'espace propre (c'est-à-dire les vecteurs formant la solution de base du système d'équations (1)) sont appelés vecteurs propres linéairement indépendants correspondant aux valeurs propres λ_0.

À partir des concepts de base ci-dessus, nous nous rendons compte de la nécessité d'étudier la méthode de résolution pour la forme mathématique typique suivante:*Trouver des polynômes caractéristiques, des valeurs propres, des vecteurs propres, des sous-espaces propres d'une matrice.*

1.7.2. Problème de croisement de matriciel

1.7.2.1. Matrice de similarité

- Soient A, B des matrices carrées d'ordre n. On dit A semblable à B, Noté $A \sim B$ s'il existe une matrice carrée Td'ordre n, $\det T \neq 0$ telle que $B = T^{-1}AT$.

- La relation de similarité préserve de nombreuses propriétés de la matrice, par exemple, si $A \sim B$, detA = detB, $rangA = rangB, P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, valeurs propres de A et B sont les mêmes.

1.7.2.2. Croisement matriciel

- **Définir.**

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit qu'une matrice A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale. Ainsi, la matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée T d'ordre n, $\det T \neq 0$ telle qu'elle $T^{-1}AT$ s'agit d'un matrice diagonale.

Diagonaliser la matrice A c'est-à-dire trouver la matrice carrée Td'ordre n et $\det T \neq 0$ de sorte qu'il $T^{-1}AT$ s'agit d'une matrice diagonale.

- **La signification du croisement matriciel**

Si la matrice A est diagonalisable, alors l'étude des propriétés (conservation par des relations de similarité) de la matrice A conduit à l'étude de ces propriétés sur une matrice diagonale et donc le problème devient plus simple.

*Il est utile d'étudier la forme mathématique typique: Diagonalisation d'une matrice.*La construction de la méthode de résolution pour ce type de mathématiques est basée sur le contenu du théorème suivant.

- **Théorème:** (*Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisée*)

La matrice A est un carré d'ordre n, diagonaliser si et seulement si A, a suffisamment n de vecteurs propres linéairement indépendants, si et seulement s'il $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = n,$ où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ a toutes les valeurs propres de A.

1.7.3. Vecteurs propres, valeurs propres de transformation linéaire

1.7.3.1. Définir

Soit V un espace vectoriel, $f : V \to V$ qui est une transformation linéaire de V. Si nous avons $f(\alpha) = \lambda\alpha$ avec $\alpha \in V$ est un vecteur non nul et $\lambda \in \square$ alors α on l'appelle le vecteur propre de f correspondant à la valeur propre λ.

1.7.3.2. Les valeurs propres, vecteurs propres de la transformation linéaire

Soit V un espace vectoriel ndimension (dimV = n) et $f : V \to V$ soit une transformation linéaire. Supposons que $(U) : u_1, u_2, ..., u_n$ est la base de V et $A = A_{f/(U)}$ est la matrice de f dans la base (U) . On a l' expression coordonnée f suivante:

$$\left[f(\alpha) \right] / _{(U)} = A.[\alpha] / _{(U)} \quad (*)$$

Si α c'est un vecteur propre de f correspondant à la valeur propre λ_0 , alors $f(\alpha) = \lambda_0\alpha.$ De (*) nous avons: $\lambda_0.[\alpha] / _{(U)} = A.[\alpha] / _{(U)}$

Donc: $$[A - \lambda_0 I][\alpha] / _{(U)} = 0 \quad (**)$$

Puisque le vecteur α est non nul, déduire le système d'équations (**) a une solution non nulle si et seulement si c'est $\det[A - \lambda_0 I] = 0 \Leftrightarrow \lambda_0$ une valeur propre de A.

On a donc le résultat suivant: λ_0 *est la valeur propre de* f *si et seulement si* λ_0 *est la valeur propre de la matrice* $A = A_{f/(U)}$. $\alpha \in V$ *est le vecteur propre de* f *correspondant à la valeur propre* λ_0 *si et seulement si* $[\alpha] / _{(U)}$ *est le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre* λ_0 .

Ainsi, pour étudier une transformation linéaire $f:V \to V$, on peut se référer à l'étude de la matrice de f. Cela conduit à la nécessité de trouver la base pour que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale (qui est une matrice simple, facile à étudier). Ainsi, une forme mathématique typique qui doit être étudiée est: *Trouver la base de V de sorte que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale.* La construction de la méthode de résolution pour ce type de mathématiques est basée sur les résultats démontrés ci-dessus.

Commentaire: Sur la base des connaissances de base sur l'application linéaire, nous proposons la nécessité d'étudier les formes mathématiques typiques suivantes et les méthodes correspondantes pour les résoudre.

- *Prouver si une application donnée est linéaire ou non.*
- *Déterminer l'expression d'une application linéaire lorsque l'image d'une base à travers cette application est connue.*
- *Trouver la matrice d'une application linéaire dans une paire de bases donnée.*
- *Trouvez la base et la dimensionnalité du noyau et de l'image d'une application linéaire.*
- *Trouver des polynômes caractéristiques, des valeurs propres, des vecteurs propres, des sous-espaces propres d'une matrice.*
- *Diagonaliser une matrice.*
- *Trouver une base telle que la matrice d'une transformation linéaire dans cette base soit la matrice diagonale .*

Conclusion chapitre 1.

À la suite de la recherche sur des sujets mathématiques dans le domaine de l'algèbre linéaire: matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espace vectoriel, application linéaire, vecteurs propres, valeurs propres matricielles et transformations linéaires.

Nous avons montré les formes mathématiques typiques qui doivent être étudiées la méthode de résolution, comme mentionné ci-dessus. Les méthodes de résolution de problèmes appropriées pour chaque type de mathématiques seront détaillées au chapitre 2.

Chapitre 2. QUELQUES TYPES TYPIQUES DE MATHÉMATIQUES ET DE MÉTHODES DE RÉSOLUTION

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous détaillons les types typiques de mathématiques proposés au chapitre 1, ainsi que les solutions correspondantes et les problèmes illustrés. À partir de là, il répondra à la question 2: *Comment sont présentées les méthodes proposées pour résoudre des problèmes mathématiques typiques?*

Les connaissances présentées dans le chapitre sont référencées dans les documents:
[8], [15], [17], [18], [20], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

2.1. Déterminant

2.1.1. Déterminer le déterminant en développant par ligne (ou colonne)

2.1.1.1. Méthode de résolution

- Pour les déterminants d'ordre 3, la règle de Sarrus peut être utilisée pour calculer.

Soit matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Pour calculer detA nous enregistrons la première colonne et la deuxième colonne à droite de la troisième colonne de A. Alors det A est égal à la somme des produits des éléments sur les "diagonale principale" moins la somme des produits sur les "diagonales auxiliaire" comme dans le schéma suivant:

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Nous avons: det A $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

- **Déterminer le déterminant en développant par ligne (ou colonne)**

Lorsque vous voyez une ligne (ou une colonne) d'un déterminant avec plus d'un zéro, vous devez développer le déterminant par cette ligne (ou colonne), en utilisant la formule (1) (ou (2)) suivante:

Soit A = $\left(a_{ij}\right)_n$ une matrice carrée d'ordre n $\left(n \geq 2\right)$. Appelée S_{ij} la matrice d'ordre n-1 obtenue à partir de la matrice A en supprimant des lignes i et des colonnes j, $M_{ij} = \det S_{ij}, A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$. Ensuite nous avons:

$$(1): \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, i = \overline{1,n};$$

$$(2):\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ j=\overline{1,n}.$$

2.1.1.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1.** Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

SOLUTIONS.

Sachant que la deuxième ligne comporte de nombreux zéros, il est plus pratique de développer le selon de cette ligne.

$$D = 2.A_{21} + 0.A_{22} + (-1)A_{23} + 0.A_{24} = 2.(-1)^{2+1} M_{21} + (-1)(-1)^{2+3} M_{23} == -2M_{21} + M_{23}$$

Mais: $M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5.0.2 + 1.(-2).1 + 4.3.4 - 4.0.1 - (-5).(-2).4 - 1.3.2 = 0$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.3.2. + (-5).(-2).1 + 4.6.1 - 3.(-2).1 - (-5).6.2 - 4.3.1 = 106$$

Donc: D = 106.

Commentaire: Nous pouvons également calculer des déterminants d'ordre 3 par développement de lignes ou de colonnes. Par exemple, pour M_{21} il est possible de développer par les éléments de la deuxième colonne:

$$M_{21} = 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- **Problème 2.** Résoudre l'équation $\begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+2 \\ 0 & 0 & x^2-1 & 0 \\ x & 1 & x & x-2 \\ 0 & 0 & x^5+1 & x^{100} \end{vmatrix} = 0$

SOLUTIONS.

En développant le déterminant selon de la deuxième ligne, nous obtenons:

$$(-1)^5 (x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x+2 \\ x & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & x^{100} \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon de la troisième ligne, nous obtenons:

$$(1-x^2).x^{100} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = (1-x^2)^2 .x^{100}$$

Donc, l'équation donnée est équivalente à: $\left(1-x^2\right)^2.x^{100}=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\pm 1$.

2.1.2. Détermination du déterminant à l'aide de transformations élémentaires

2.1.2.1. Méthode de résolution

En utilisant des transformations élémentaires, nous pouvons rendre le déterminant plus facile à calculer, par exemple, faire apparaître certaines lignes (ou colonnes) du déterminant avec plusieurs zéros, puis appliquer la formule d'expansion du déterminant en fonction de ces lignes (ou colonnes). En particulier, il est possible de transformer pour amener le déterminant à la forme d'un triangle, en utilisant la formule suivante obtiendra le résultat.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Les transformations élémentaires de lignes (ou de colonnes) déterminantes les plus couramment utilisées sont:

- Échangez deux lignes (ou colonnes) du déterminant et changez le signe du déterminant.
- Prend un facteur commun d'une ligne (ou d'une colonne) en dehors du déterminant.
- Multipliez une ligne (une colonne) par n'importe quel nombre, puis ajoutez à une autre ligne (une autre colonne).

2.1.2.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1**. Calculer les déterminants

$$a)\ \mathrm{A} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & 9 \\ 2 & -11 & 13 & 4 \\ -4 & 22 & -25 & 30 \\ 0 & 2 & 8 & -7 \end{vmatrix} \quad b)\ \mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

SOLUTIONS.

$$a)\ A \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 22 \\ 0 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & 8 & -7 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 0 & 2 & -51 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 6 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & -127 \end{vmatrix} = (-1).1.1.(-127) = 127$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par 2, -4, puis ajoutez respectivement aux deuxième et troisième lignes.

(2): Multipliez la deuxième ligne par 2, -2, puis ajoutez respectivement aux troisième et quatrième lignes.

(3): Multipliez la troisième ligne par -2, puis ajoutez à la quatrième ligne.

$b)$ Prenez la première ligne et additionnez toutes les lignes restantes, nous obtenons:

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1.2.3...n = n!$$

- **Problème 2.** Prouver $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

SOLUTIONS.

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première colonne par -1, puis ajoutez à la quatrième colonne, multipliez la deuxième colonne par -1, puis ajoutez à la troisième colonne.

(2): Le déterminant a deux colonnes d'échelle.

- **Problème 3.** Calcul des déterminants de l'ordre $n\left(n \geq 2\right)$:

$$a)\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \quad b)\ B = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

SOLUTIONS.

$$a)\ A\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \dots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \dots & 2\\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2\\ 0 & 0 & 1 & \dots & -2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2\end{vmatrix}=(-2)(n-2)!$$

Expliquer:

(1): Multipliez la deuxième ligne par -1, puis ajoutez aux lignes (3), (4), …, (n).

(2): Multipliez la première ligne par -2, puis ajoutez à la deuxième ligne.

$$b)\ B\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \dots & b\\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b\\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \dots & b\\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b\end{vmatrix}$$

$$=\left(a+(n-1)b\right)(a-b)^{n-1}.$$

Expliquer:

(1): Additionnez toutes les colonnes (2), (3),…, (n) à la première colonne.

(2): Multipliez la première ligne par -1, puis ajoutez aux deuxièmes lignes (2), (3), …, (n).

2.1.3. Déterminer le déterminant en représentant le déterminant comme une somme de déterminants

2.1.3.1. Méthode de résolution

Exprimer les déterminants sous forme de sommes de déterminants est plus facile à calculer, en s'appuyant sur les propriétés suivantes:

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur □ et supposons qu'une ligne i $(1 \le i \le n)$ de A possède la propriété $a_{ij} = \lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij},\ j=\overline{1,n}$. Ensuite nous avons:

$$\det A = \begin{vmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a'_{i1}+\mu a''_{i1} & \lambda a'_{i2}+\mu a''_{i2} & \dots & \lambda a'_{in}+\mu a''_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}$$

Dans lequel, les lignes restantes des trois déterminants des deux côtés sont exactement les mêmes et sont $n-1$ la ligne restante de A. Nous avons le même résultat pour la colonne.

2.1.3.2. Problème mathématique illustré

Calculer le déterminant $A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n & x_n & x_n & x_n & ... & x_n & a_n \end{vmatrix}$

SOLUTIONS.

Écrivez la première colonne du déterminant sous la forme: $1-1, x_1+0, x_2+0, x_3+0, ..., x_n+0.$

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_n & x_n & x_n & ... & x_n & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & x_n & x_n & ... & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

Dans le premier déterminant, soustrayez chaque colonne de la deuxième colonne de la colonne précédente et développez le déterminant de la première ligne, nous obtenons:

$$(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)...(x_n - a_n)$$

En développant le second déterminant selon la première colonne, on obtient: $-a_1 a_2 ... a_n$

Ainsi: $$A_n = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)...(x_n - a_n) - a_1 a_2 ... a_n$$

2.1.4. Détermination du déterminant par la méthode de représentation du déterminant en tant que produit de déterminants

2.1.4.1. Méthode de résolution

Supposons que vous deviez calculer le déterminant D d'ordre n. Nous représentons la matrice correspondante A du D sous la forme produit desmatrices carrées d'ordre n plus simple: A = B.C. Nous avons: D = detA = det (B.C) = detB. detC. Avec detB, detC des déterminants facilement calculables. À partir de là, on peut calculer D.

2.1.4.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1.** Calcul du déterminant de l'ordre $n\,(n \geq 2)$:

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & ... & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & ... & 1+x_2y_n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & ... & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

SOLUTIONS.

Avec $n \geq 2$, nous avons:

$$A = \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & ... & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & ... & 1+x_2y_n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & ... & 1+x_ny_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Ainsi: $D = \det A = \det B . \det C.$

$D = 0$ si $n > 2$; $D = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ si $n = 2$

- **Problème 2.** Calcul du déterminant de l'ordre $n\,(n \geq 2)$:

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & ... & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & ... & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & ... & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

SOLUTIONS.

Avec $n \geq 2$, nous avons:

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & ... & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & ... & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & ... & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & ... & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & .... \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & ... & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & ... & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Ainsi: $$D = \det A = \det B . \det C$$

$D = 0$ si $n > 2$; $D = -\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$ si $n = 2$

2.1.5. Déterminer le déterminant par induction

2.1.5.1. Méthode de résolution

Appliquez les propriétés des déterminants, des transformations ou des développements de déterminants par ligne ou par colonne pour représenter le déterminant à calculer sur des déterminants d'ordre inférieur de la même forme. De là, nous obtiendrons la formule récursive.

Utilisez la formule de récurrence et calculez directement des déterminants de même forme d’ordre 1, d’ordre 2, ..., pour en déduire le déterminant à calculer.

2.1.5.2. Problème mathématique illustré

Calculer le déterminant $$D_n = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUTIONS.

En développant le déterminant selon la première ligne, nous avons:

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la première colonne, nous avons la formule de récurrence:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \,(*) \quad (n \geq 3)$$

À partir de (*) nous avons: $D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

Comme la formule est vraie pour tout $n \geq 3$, on a:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \dots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

En calculant directement, nous avons: $D_2 = 19, D_1 = 5$ déduire $D_2 - 2D_1 = 9$

Ainsi: $$D_n - 2D_{n-1} = 3^n \,(1)$$

D'autre part, également à partir de la formule (*), nous avons: $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$

Comme ci-dessus, nous avons:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - 3D_{n-3}) = \dots = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 2^n$$

Ainsi: $$D_n - 3D_{n-1} = 2^n \quad (2)$$

De (1) et (2) déduire: $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2.2. Rang de la matrice

2.2.1. Trouver le rang d'une matrice à l'aide du déterminant

2.2.1.1. Méthode de résolution

De la définition du rang de la matrice, on peut immédiatement déduire l'algorithme suivant pour trouver le rang de la matrice A d'ordre $m \times n \left(A \neq O \right)$.

Étape 1: Trouvez un sous-déterminateur d'ordre k non nul de A, k plus le nombre est grand, mieux c'est. Supposons que le sous-déterminateur d'ordre k non nul est D_k.

Étape 2:Considérez tous les sous-déterminateur d'ordre k+1 de A qui contiennent le déterminant D_k. Les 3 possibilités suivantes se présentent:

- Il n'existe pas un sous- déterminateur d'ordre k+1 de A. Cette possibilité se produit si et seulement si $k = \min\left\{m, n\right\}$. Ensuite, $rang\ A = k = \min\left\{m, n\right\}$. Algorithm se termine.
- Tous les sous-déterminateur d'ordre k+1 de A contenant le sous-déterminateur D_k sont 0. Alors $rangA = k$. L'algorithme se termine.
- Il existe un sous-déterminateur d'ordre k+1 de A qui D_{k+1} contient un D_k sous-déterminateur non nul, puis répétez l'étape 2 avec à la D_{k+1} place D_k. Et ainsi de suite jusqu'à ce que le premier ou le deuxième cas se produise, puis l'algorithme se termine.

2.2.1.2. Problème mathématique illustré

Trouver le rang de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUTIONS.

On voit que A a un sous-déterminateur d'ordre 2, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (Ce déterminant est composé des 2 premières lignes et des 2 premières colonnes de A)

En considérant les sous-déterminants d'ordre 3 de A contenant D_2, on voit qu'il existe un sous-déterminant d'ordre 3 non nul qui est le déterminant $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (Ce déterminant est composé des lignes (1), (2), (3), des colonnes (1), (2), (4) de A). En continuant à considérer les sous-déterminants d'ordre 4 de A contenant D_3, il y a, 2 de ces déterminants en tout:

$$D_{4,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad D_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ces deux déterminants sont égaux à 0. Donc, $rangA = 3$.

Commentaire:*Trouver le rang d'une matrice à l'aide du déterminant ci-dessus doit être assez compliqué, on peut donc utiliser la méthode de trouver le rang de la matrice par les transformations élémentaires suivantes.*

2.2.2. Trouver le rang d'une matrice en utilisant des transformations élémentaires

2.2.2.1. Méthode de résolution

- Les trois transformations suivantes sont appelées transformations élémentaires sur les lignes de la matrice:

- En échangeant les deux lignes.
- Multiplier une ligne par un nombre non nul.
- Multipliez une ligne par n'importe quel nombre, puis ajoutez une autre ligne.

De même, en remplaçant les lignes par des colonnes, nous avons trois transformations élémentaires sur les colonnes de la matrice.

- Le contenu de cette méthode repose sur les deux constats suivants:

(1) Les transformations élémentaires ne changent pas le rang de la matrice.

(2) Toute matrice non nulle peut être convertir une matrice en sa forme échelle après un nombre fini de transformations élémentaires sur la ligne.

Voici un algorithme pour convertir une matrice en sa forme échelle par des transformations élémentaires:

Considérez la matrice $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Étape 1:En échangeant les deux lignes (si nécessaire), nous pouvons toujours supposer $a_{11} \neq 0$.

Multipliez la ligne (1) par $\frac{-a_{21}}{a_{11}}$, puis ajoutez à la ligne (2),

Multipliez la ligne (1) par $\frac{-a_{31}}{a_{11}}$, puis ajoutez à la ligne (3),

……………………………………………………………..

Multipliez la ligne (1) par $\frac{-a_{n1}}{a_{11}}$, puis ajoutez à la ligne (n).

On obtient la matrice $$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \dots & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \dots & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarque: Si toute la première colonne est zéro $(a_{11} = 0, a_{21} = 0, ..., a_{n1} = 0)$, nous pouvons ignorer la première colonne et passer à l'étape 1 avec la colonne suivante.

Étape 2: Considérez la matrice $$B = \begin{bmatrix} b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & \dots & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m2} & \dots & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Si B = 0 ou B a une forme en échelle, alors c'est A_1 une matrice en échelle, l'algorithme se termine. Dans le cas contraire, répétez l'étape 1 pour la matrice B. Il convient de noter que la matrice B a une ligne et une colonne de moins que la matrice A. Par conséquent, après un nombre fini d'étapes d'itération, B sera soit une matrice nulle soit une matrice en échelle. Ensuite, l'algorithme se terminera.

- **Méthode pour trouver le rang d'une matrice à l'aide de transformations élémentaires:**

Pour trouver le rang de la matrice A, nous procédons comme suit:

- Utilisez l'algorithme ci-dessus pour amener la matrice A sous la forme d'échelle.
- Conclusion: le rang de la matrice A est égal au nombre de lignes non nulles de la matrice en échelle.

2.2.2.2. Problème mathématique illustré

Trouver le rang de la matrice $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUTIONS.

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 10 & 12 & 2 \\ 0 & -3 & 13 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)}\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 5 & 2\\0 & 1 & 3 & 4 & 6\\0 & 0 & 22 & 28 & 26\\0 & 0 & 22 & 28 & 26\end{bmatrix}\xrightarrow{(4)}\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 5 & 2\\0 & 1 & 3 & 4 & 6\\0 & 0 & 22 & 28 & 26\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): En échangeant les première et deuxième lignes.

(2): Multipliez la première ligne par 3, puis ajoutez à la troisième ligne. Multipliez la première ligne par 2, puis ajoutez à la quatrième ligne.

(3): Multipliez la deuxième ligne par 4, puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la deuxième ligne par 3, puis ajoutez à la quatrième ligne.

(4): Multipliez la troisième ligne par (-1), puis ajoutez la quatrième ligne.

Ainsi: $rank\, A = 3$

2.3. Matrice inverse

2.3.1. Méthode pour trouver la matrice inverse par déterminant

2.3.1.1. Méthode de résolution

- *Complément algébrique d'un élément*

Soit A une matrice carrée d'ordre n: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$

Si nous supprimons les lignes i et les colonnes jde A, nous obtenons la sous-matrice d'ordre n-1 de A, notée M_{ij}. Alors, A_{ij} $=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$,l'appelle le complément algébrique de l'élément situé dans la ligne i colonnes j de la matrice A.

- **Méthode pour trouver la matrice inverse de A**

Soit A une matrice carrée d'ordre n pour trouver l'inverse de A, on fait ceci:

Étape 1:Calculer $\det A$

Étape 2: Conclusion

- Si $\det A = 0$ alors A n'est pas inversible (c'est-à-dire que A n'a pas de matrice inverse)
- Si $\det A \neq 0$ alors A est inversible et calcule: $P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}$

À partir de là, retrouvez: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} P_A$

2.3.1.2. Problème mathématique illustré

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

SOLUTIONS.

Nous avons: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Donc A est inversible

Trouver la matrice P_A de A. On a:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Donc: $P_A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ainsi: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Commentaire: Si nous utilisons le déterminant pour trouver l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n, nous devons calculer un déterminant d'ordre n et un n^2 déterminant d’ordre n-1. Un tel calcul est assez compliqué lorsque $n > 3$. Par conséquent, nous appliquons souvent cette méthode lorsque $n \leq 3$. Lorsque $n \geq 3$ nous pouvons utiliser la méthode suivante.

2.3.2. La méthode pour trouver la matrice inverse en s'appuyant sur la transformation élémentaire

2.3.2.1. Méthode de résolution

Pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A d'ordre n, on procède comme suit:

- Créer une matrice d’ordre $n \times 2n : \left[A | I_n \right]$ (I_n qui est la matrice d'unité d’ordre n)

$$\left[A | I_n \right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

- Utilisez ensuite des transformations élémentaires sur la ligne pour remettre la matrice $\left[A\middle|I_n\right]$ sous la forme $\left[I_n\middle|B\right]$

- Alors, B est la matrice inverse de A, $B = A^{-1}$.

Remarque: Si dans le processus de transformation, nous voyons que le bloc de gauche apparaît une ligne composée uniquement de zéros, alors la matrice A n'est pas inversible.

2.3.2.2. Problème mathématique illustré

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUTIONS.

$$\left[A\middle|I_4\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right]$$

Expliquer:

(1): Ajoutez les deuxième, troisième et quatrième lignes à la première ligne.

(2): Multipliez la première ligne par $\left(\frac{1}{3}\right)$.

(3): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez les deuxième, troisième et quatrième lignes, respectivement.

(4): Ajoutez les deuxième, troisième et quatrième lignes à la première ligne.

(5): Multipliez les deuxième, troisième et quatrième lignes par (-1), respectivement.

Ainsi: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

2.3.3. La méthode pour trouver la matrice inverse en résolvant le système d'équations

2.3.3.1. Méthode de résolution

Étant donné une matrice carrée d'ordre n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Pour trouver la matrice inverse, A^{-1} nous procédons comme suit:

- Établissez un système d'équations: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

Où $x_1, x_2, ..., x_n$ sont les inconnues, $y_1, y_2, ..., y_n$ sont les paramètres.

- Si pour tous les paramètres $y_1, y_2, ..., y_n$, le système d'équations linéaires (2), a toujours une solution unique: $\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n \end{cases}$ alors: $A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$
- S'il existe $y_1, y_2, ..., y_n$ tel que le système d'équations linéaires (2) n'ait pas de solution ou ait une infinité de solutions, alors la matrice A n'est pas inversible.

2.3.3.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1**. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUTIONS.

Considérons le système d'équations: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_4 & (4) \end{cases}$

En additionnant chaque côté de (1), (2), (3), (4), on obtient:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (*)$$

En soustrayant l'équation (*) pour (1), (2), (3), (4), nous obtenons:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ x_2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \\ x_3 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4) \\ x_4 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \end{cases}$$

Ainsi: $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Problème 2**. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

SOLUTIONS.

Mettre en place un système d'équations: $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = y_4 & (4) \end{cases}$

En additionnant chaque côté de (1), (2), (3), (4) nous avons:

$(a+3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \quad (*)$

- Si $a = -3$, choisissez les paramètres y_1, y_2, y_3, y_4 pour que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \neq 0$. Alors (*) n'a pas de solution, donc le système d'équations n'a pas de solution, donc A n'est pas inversible.
- Si $a \neq -3$ alors de (*) on a:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{a+3}\left(y_1+y_2+y_3+y_4\right) \quad (**)$$

En prenant (1), (2), (3), (4) moins (**), on a:

$$(a-1)x_1=\frac{1}{a+3}\left((a+2)y_1-y_2-y_3-y_4\right)$$
$$(a-1)x_2=\frac{1}{a+3}\left(-y_1+(a+2)y_2-y_3-y_4\right)$$
$$(a-1)x_3=\frac{1}{a+3}\left(-y_1-y_2+(a+2)y_3-y_4\right)$$
$$(a-1)x_4=\frac{1}{a+3}\left(-y_1-y_2-y_3+(a+2)y_4\right)$$

+Si $a=1$ choisissez les paramètres y_1,y_2,y_3,y_4 pour que $(a+2)y_1-y_2-y_3-y_4\neq 0$. Alors le système d'équations n'a pas de solution, donc A n'est pas inversible.

+ Si $a\neq 1$ alors nous avons:

$$x_1=\frac{1}{(a-1)(a+3)}\left((a+2)y_1-y_2-y_3-y_4\right)$$
$$x_2=\frac{1}{(a-1)(a+3)}\left(-y_1+(a+2)y_2-y_3-y_4\right)$$
$$x_3=\frac{1}{(a-1)(a+3)}\left(-y_1-y_2+(a+2)y_3-y_4\right)$$
$$x_4=\frac{1}{(a-1)(a+3)}\left(-y_1-y_2-y_3+(a+2)y_4\right)$$

Ainsi:
$$A^{-1}=\frac{1}{(a-1)(a+3)}\begin{bmatrix} a+2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a+2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a+2 \end{bmatrix}$$

Résumé:

Si $a=-3$ ou $a=1$ alors la matrice A n'est pas inversible.

Si $a\neq -3$ et $a\neq 1$ alors la matrice inverse A^{-1} est définie comme ci-dessus.

2.4. Système d'équations linéaires

2.4.1. Résoudre et argumenter un système d'équations linéaires par la méthode de transformation élémentaire

2.4.1.1. Méthode de résolution

- Le contenu de base de cette méthode est basé sur le théorème important suivant concernant la solution d'un système d'équations linéaires.

Pour un système d'équations linéaires générales: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)

A et $\overline{A}$ est la matrice des coefficients et la matrice augmentée, respectivement. Alors:

- Si rang A < rang $\overline{A}$, alors le système d'équations (1) n'a pas de solution.
- Si rang A = rang $\overline{A} = r$ alors le système de l'équation (1) a une solution. Suite:

+ Si $r = n$ alors le système d'équations (1) a une solution unique.

+ Si $r < n$ alors le système d'équations (1) a une infinité de solutions qui dépendent $n - r$ des paramètres.

- *Algorithme pour résoudre un système d'équations linéaires*

Faire une matrice augmentée $\overline{A}$. Par des transformations élémentaires sur la ligne, la matrice est transformée $\overline{A}$ en une forme d'échelle. La matrice échelle finale a la forme:

$$\overline{A} \to C = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & ... & c^*_{1i_1} & ... & ... & ... & ... & ... & c_{1n} & d_1 \\ 0 & ... & 0 & ... & c^*_{2i_2} & ... & ... & ... & c_{2n} & d_2 \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & ... & ... & c^*_{ri_r} & ... & c_{rn} & d_r \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & d_{r+1} \\ . & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & d_m \end{array}\right] \quad (2)$$

Le système d'équations correspondant à la matrice C est équivalent au système d'équations d'origine. Ainsi

- S'il existe $d_i \neq 0 \left(r + 1 \leq i \leq m\right)$, alors le système n'a pas de solution.
- Si $d_{r+1} = d_{r+2} = ... = d_m = 0$, le système d'équations a une solution. Ensuite, les colonnes $i_1, i_2, ..., i_r$ (les colonnes marquées d'un *) sont conservées à gauche et les colonnes $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}$ sont les inconnues, tandis que les colonnes restantes se déplacent vers la droite, les inconnues x_k correspondant à ces colonnes deviendront des paramètres.

Donc, nous avons le $n - r$ paramètre donné et le système d'équations équivalent au système d'équations:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{1i_1} & c_{1i_2} & ... & c_{1i_r} & d_1\left(x_k\right) \\ 0 & c_{2i_2} & ... & c_{2i_r} & d_2\left(x_k\right) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & c_{ri_r} & d_r\left(x_k\right) \end{array}\right] \quad (3)$$

Dans lequel $d_i\left(x_k\right)$ sont des fonctions linéaires de x_k avec le $k \neq i_1, i_2, ..., i_r$. Système d'équations (3) qui est un système d'équations triangulaires, nous pouvons facilement résoudre par la méthode de substitution, c'est-à-dire en calculant à son tour $x_r, x_{r-1}, ..., x_1$.

2.4.1.2. Problème mathématique illustré

- Résoudre le système d'équations: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2m - 8 \end{cases}$

SOLUTIONS.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2m-8 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & m-3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2m-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2m-10 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right]$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (-2) puis ajoutez à la deuxième ligne, multipliez la première ligne par (-3) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à la quatrième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (-2) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la deuxième ligne par (-1) puis ajoutez à la quatrième ligne.

(3): Multipliez la troisième ligne par (-1), puis ajoutez à la quatrième ligne.

- Si $m \neq 5$ alors le système d'équations n'a pas de solution.

- Si $m = 5$ alors le système d'équations donné est équivalent à: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Dans ce cas, le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent des deux paramètres x_2 et x_5. En déplaçant la colonne (2) et la colonne (5) vers la droite, le système d'équations a la forme:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 1 - 2x_2 - x_5 \\ x_3 - x_4 = 1 + 2x_5 \\ -x_4 = -2x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 2x_5 \\ x_3 = x_4 + 2x_5 + 1 = 4x_5 + 1 \\ x_1 = 1 - 2x_2 - x_5 - 2x_4 = -2x_2 - 5x_5 + 1 \end{cases}$$

En résumé, dans ce cas, la solution du système d'équations est:

$$\begin{cases} x_1 = -2a - 5b + 1 \\ x_2 = a \\ x_3 = 4b + 1 \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \\ x_4 = 2b \\ x_5 = b \end{cases}$$

2.4.2. Résoudre et argumenter le système d'équations en utilisant la méthode des déterminants

2.4.2.1. Méthode de résolution

Étant donné un système d'équations $Ax = B$ avec A comme matrice carrée, pour résoudre et argumenter ce système d'équations, nous procédons comme suit:

- Calculer D = det A et déterminants D_j, $j = \overline{1, n}$.
- Si $D \neq 0$ alors le système d'équations a une solution unique, calculée par la formule:

$x_j = \dfrac{D_j}{D}$, $j = \overline{1, n}$.

- Si D = 0 et existe $D_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, alors le système d'équations n'a pas de solution.
- Si D = 0 et $D_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, alors pas encore de conclusion. En substituant la valeur du paramètre (dans ce cas) dans le système donné et en résolvant par la méthode de transformation élémentaire, le système d'équations peut n'avoir aucune solution ou une infinité de solutions.

2.4.2.2. Problème mathématique illustré

Résolvez et argumentez le système d'équations suivant avec le paramètre m:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

SOLUTIONS.

$$\text{D = det A} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(1-m)^2;\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = (m^2-1)(1-m);$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = (1-m)^2; \quad D_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (1-m)^2(m+1)^2.$$

Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$ alors le système d'équations à solution unique est:

$$x_1 = -\frac{m+1}{m+2};\ x_2 = \frac{1}{m+2};\ x_3 = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

Si $m = -2$ alors D = 0, $D_2 = 9 \neq 0$, alors le système d'équations n'a pas de solution.

Si $m = 1$ alors $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, pas encore de conclusion. En substituant $m = 1$ dans le système d'équations donné, on obtient:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ce système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Commentaire: La méthode des déterminants est souvent utilisée dans certains problèmes lorsque le nombre d'équations est égal au nombre inconnu et est "assez petit". Le problème ci-dessus peut être résolu par la méthode de transformation élémentaire comme suit:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array}\right]$$

Nous avons: $2 - m - m^2 = (2+m)(1-m)$

- Si $m = 1$ alors le système d'équations devient $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$rang A = rang\overline{A} = 1$ donc, le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres x_2, x_3. La solution du système d'équations est: $\begin{cases} x_1 = 1 - a - b \\ x_2 = a & a, b \in \mathbb{R} \\ x_3 = b \end{cases}$

- Si $m = -2$ alors, le système d'équations devient: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$. Le système d'équation n'a pas de solution.
- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors le système d'équations admet une unique solution:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1 + m - m^2 - m^3}{(2+m)(1-m)} = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{m+2} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2} \\ x_2 = x_3 - m = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{m+2} - m = \dfrac{1}{m+2} \\ x_1 = m^2 - x_2 - m x_3 = \dfrac{-m-1}{m+2} \end{cases}$$

2.5. Espace vectoriel

2.5.1. Prouver qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système (fini) donné de vecteurs

2.5.1.1. Méthode de résolution

Vecteur $u \in V$ est une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, ..., u_m$ si et seulement si l'équation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_m u_m = u$ a une solution $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$.

2.5.1.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1**. Dans $\mathbb{R}^3$ pour les vecteurs $u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (0, 1, -3)$

$a)$ Vecteur est-il $u = (2, -3, 3)$ une combinaison linéaire d'un système vectoriel u_1, u_2 ?

$b)$ Trouvez m pour $v = (1, m, -3)$ combinaison linéaire du système vectoriel u_1, u_2 .

SOLUTIONS.

$a)$ Considérons l'équation: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = u \quad (1)$ avec l'inconnu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Nous avons: $(1) \Leftrightarrow \lambda_1 (1, -2, 3) + \lambda_2 (0, 1, -3) = (2, -3, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Donc, u la combinaison linéaire du système vectoriel u_1, u_2.

$b)$ Considérez l'équation: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = v \quad (2)$

On a: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = m \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = -3 \end{cases}$. Ce système d'équations a une solution si et seulement si m=0.

Donc, v est une combinaison linéaire du système vectoriel u_1, u_2 si et seulement si m=0 .

- **Problème 2.** Dans $\mathbb{R}_3[x]$ pour les vecteurs:

$u_1 = x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad u_2 = 2x^3 + x^2 - x - 1, \quad u_3 = 3x^3 + 3x^2 - x + 2$

Trouver la condition pour $u = ax^3 + bx^2 + cx + d$ être une combinaison linéaire du système vectoriel u_1, u_2, u_3.

SOLUTIONS.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = u$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(x^3 + 2x^2 + x + 1\right) + \lambda_2 \left(2x^3 + x^2 - x - 1\right) + \lambda_3 \left(3x^3 + 3x^2 - x + 2\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = b \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = c \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = d \end{cases}$$

Résolvez ce système d'équations par la méthode de transformation élémentaire. Faire une matrice augmentée et effectuer des transformations élémentaires sur la ligne:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 1 & -1 & -1 & c \\ 1 & -1 & 2 & d \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -3 & b-2a \\ 0 & -3 & -4 & c-a \\ 0 & -3 & -1 & d-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & a-b+c \\ 0 & 0 & 2 & a-b+d \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 3a-3b+2c+d \end{array}\right]$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (-2) puis ajoutez à la deuxième ligne, multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez à la quatrième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la deuxième ligne par (-1), puis ajoutez à la quatrième ligne.

(3): Multipliez la troisième ligne par (2), puis ajoutez à la quatrième ligne.

Le système d'équations ci-dessus a une solution si et seulement si $3a-3b+2c+d=0$. C'est la condition pour u être une combinaison linéaire du système vectoriel u_1,u_2,u_3.

2.5.2. Prouver qu'un système (fini) de vecteurs est linéairement indépendant ou linéairement dépendant

2.5.2.1. Méthode de résolution

- Soit le système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ appartenir à l'espace vectoriel V sur □. Considérez l'équation: $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+...+\lambda_m u_m=0$ avec $\lambda_i \in$ □ $(*)$

- Si l'équation (*) n'a que des solutions triviales $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$ alors le système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ est linéairement indépendant de □ .

- Si l'équation (*) a solution non triviale et qui n'est $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in$ □ pas simultanément nulle, alors le système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ est linéairement dépendant.

- Cas particulier: Pour $u_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in}) \in$ □$^n, i=\overline{1,m}$

Mettre:
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Alors:

- (a) Le système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ est linéairement indépendant si et seulement si $rangA=m$.

- (b) Le système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ est linéairement dépendant si et seulement si $rangA<m$.

Ainsi, le problème de considérer l'indépendance linéaire ou la dépendance linéaire du système vectoriel $u_1,u_2,...,u_m$ en □^{n} ramener de problème de trouver rang de la matrice A "associée" à celui-ci.

2.5.2.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1.** Dans l'espace, □$_3[x]$ considérez si les systèmes vectoriels suivants sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants?

$$a)\ u_1=x^3-2x+3, u_2=x^2+1, u_3=2x^3+x^2-4x+10.$$
$$b)\ v_1=x^3-2x+3, v_2=x^2+x+1, v_3=x^3+2x^2+5.$$

SOLUTIONS.

$a)\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\left(x^3 - 2x + 3\right) + \lambda_2\left(x^2 + 1\right) + \lambda_3\left(2x^3 + x^2 - 4x + 10\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Résolvez le système d'équations par la méthode de transformation élémentaire:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (2), puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-3), puis ajoutez à la quatrième ligne.

(2): Supprimer la ligne 0.

(3): Multipliez la deuxième ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne.

Ainsi: $rangA = 3$ (égal aux inconnues du système d'équations).Donc, le système d'équations n'a que des solutions $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .Donc, Le système vectoriel u_1, u_2, u_3 est linéairement indépendant.

$b)\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\left(x^3 - 2x + 3\right) + \lambda_2\left(x^2 + x + 1\right) + \lambda_3\left(x^3 + 2x^2 + 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_1 + \lambda_3\right)x^3 + \left(\lambda_2 + 2\lambda_3\right)x^2 + \left(-2\lambda_1 + \lambda_2\right)x + \left(3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Créez une matrice de coefficients et transformez:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (2), puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-3) et ajoutez à la quatrième ligne.

(2): Supprimer les deuxième et troisième lignes.

Donc, $rangA = 2$ moins que le nombre inconnu.

Ainsi, l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ admet une solution non triviale.

Donc, Le système vectoriel v_1, v_2, v_3 est linéairementdépendant.

- **Problème 2.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ considérez si les systèmes vectoriels suivants sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants?

$$a)\, u_1 = (1,-1,2,0), u_2 = (-1,0,1,1), u_3 = (2,1,-1,2)$$
$$b)\, v_1 = (-1,1,1,-1), v_2 = (2,-1,2,-1), u_3 = (0,1,4,-3)$$

SOLUTIONS.

$a)$ Créez une matrice A où les lignes de A sont des vecteurs u_1, u_2, u_3 et calculez le rang de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Ajoutez la première ligne à la seconde, multipliez la première ligne par (-2), puis ajoutez à la troisième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (3), puis ajoutez à la troisième ligne.

Donc, $rang A = 3$ (égal au nombre de vecteurs du système). Donc, le système vectoriel est linéairement u_1, u_2, u_3 indépendant.

$$b)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (2), puis ajoutez à la deuxième ligne.

(2): Supprimer la troisième ligne.

Donc, $rang A = 2$ inférieur au nombre de vecteurs du système. Donc, le système vectoriel v_1, v_2, v_3 est linéairement dépendant.

2.5.3. Trouver le rang, le sous-système linéairement indépendant maximal d'un système vectoriel

2.5.3.1. Méthode de résolution

Dans $\mathbb{R}^n$ pour les systèmes vectoriels:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\
&\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\
&.................................. \\
&\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})
\end{aligned}$$

Pour trouver le rang, le sous-système linéairement indépendant maximum de système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ fait ce qui suit:

- Faire une matrice A comme une matrice de lignes de vecteurs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Par des transformations élémentaires sur la ligne, ramenant la matrice A à la forme échelle. Alors:

$$rang\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} = rangA$$

Le sous-système maximum linéairement indépendant du système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ est constitué de vecteurs correspondant aux lignes non nulles de la matrice en échelle.

2.5.3.2. Problème illustré

Dans $\mathbb{R}^5$ pour le système vectoriel:

$$\alpha_1 = (3,2,0,1,4), \alpha_2 = (4,1,0,2,3), \alpha_3 = (3,1,-1,0,1), \alpha_4 = (1,0,1,2,2)$$

Trouvez le sous-système linéaire indépendant maximum et rang du système vectoriel ci-dessus.

SOLUTIONS.

$$A = \left[\begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{matrix}\right]\begin{matrix}4\\2\\3\\1\end{matrix}$$

$$\to \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{matrix}\right]\begin{matrix}4\\2\\3\\1\end{matrix} \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\begin{matrix}4\\2\\1\\3\end{matrix}$$

Donc: rangA = 3.

Ainsi, $rang\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3.$ Le sous-système maximal linéairement indépendant du système $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ est $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$

2.5.4. Trouver la matrice à convertir d'une base à une autre

2.5.4.1. Méthode de résolution

Dans l'espace vectoriel V pour deux bases:

$$(\alpha): \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$
$$(\beta): \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$$

- Les vecteurs $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ sont uniquement écrits sous la forme:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n & (1) \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n & (2) \\ .... & \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n & (n) \end{cases}$$

Alors: $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & \ddots & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Est la matrice de conversion de base de (α) à (β).

Résolvez les équations vectorielles (1), (2),…, (n). Nous pouvons déterminer $T_{\alpha\beta}$

2.5.4.2. Problème mathématique illustré

Dans $\mathbb{R}^3$ pour deux bases:

$$(\alpha): \ \alpha_1 = (1,1,1), \quad \alpha_2 = (-1,2,1), \quad \alpha_3 = (1,3,2)$$

$(\beta): \beta_1 = (1,0,1), \quad \beta_2 = (1,1,0), \quad \beta_3 = (0,1,1)$

Trouver la matrice de conversion de base de (α) à (β).

SOLUTIONS.

Supposer:

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \quad (1)$$
$$\beta_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \quad (2)$$
$$\beta_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \quad (3)$$

Alors: $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Pour trouver a_i, b_i, c_i, nous résolvons les équations vectorielles (1), (2), (3).

L'équation (1) est équivalente à: $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \end{cases}$

L'équation (2) est équivalente à: $\begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \\ b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \end{cases}$

L'équation (3) est équivalente à: $\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases}$

Pour résoudre les trois systèmes d'équations ci-dessus, nous utilisons la méthode de transformation élémentaire.

Matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Donc: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = -2 \\ a_2 = -1 - a_3 = 1 \\ a_1 = a_2 - a_3 + 1 = 4 \end{cases}$ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} b_3 = 3 \\ b_2 = 1 - b_3 = -2 \\ b_1 = b_2 - b_3 + 1 = -4 \end{cases}$ $;(3) \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -1 \\ c_2 = -c_3 = 1 \\ c_1 = c_2 - c_3 = 2 \end{cases}$

Ainsi: $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

2.5.5. Considérez si un ensemble donné est un sous-espace ou non

2.5.5.1. Méthode de résolution

Soit W un sous-ensemble non vide de l'espace vectoriel V.

- Pour prouver qu'un W sous-espace de V, on prouve que W la condition est satisfaite : $x + \lambda y \in W, \forall x, y \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Pour prouver que W n'est pas un sous-espace V, il suffit de montrer que W la condition n'est pas satisfaite: $x + y \in W, \forall x, y \in W$ ou $\lambda x \in W, \forall x \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2.5.5.2. Problème mathématique illustré

Considérez si chacun des ensembles suivants est un sous-espace de l'espace vectoriel correspondant?

$a)$ Tous les vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$, la première et la dernière coordonnées sont égales?

$b)$ Tous les vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont des entiers?

SOLUTIONS.

$a)$ On pose: $W_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = x_n\}$

Supposons: $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in W_1, v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in W_1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Nous avons: $\lambda u + v = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, ..., \lambda x_n + y_n)$

Parce que $u, v \in W_1$ déduire $x_1 = x_n$ et $y_1 = y_n$. Ainsi: $\lambda x_1 + y_1 = \lambda x_n + y_n$

Donc nous avons: $\lambda u + v \in W_1$

La conclusion W_1 est que le sous-espace de $\mathbb{R}^n$

$b)$ On pose: $W_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n}\}$

Nous avons: $u = (1, 0, 0, ..., 0) \in W_2$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, mais $\lambda u = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, ..., 0\right) \notin W_2$

Donc, W_2 pas un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

2.5.6. Trouver la base et le nombre de dimensions du sous-espace généré par un système vectoriel

2.5.6.1. Méthode de résolution

Dans $\mathbb{R}^n$ pour les systèmes vectoriels:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\
\alpha_2 &= (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\
&.............................. \\
\alpha_m &= (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})
\end{aligned}$$

Puisque chaque sous-système au maximum indépendant d'un système $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ est un générateur, il est donc la base de l'espace sous-vectoriel $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$.

Donc, pour trouver la base et le nombre de dimensions du sous-espace généré par le système vectoriel, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ nous procédons comme suit:

- Faire une matrice A dont des lignes sont des vecteurs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Par transformations élémentaires sur la ligne, on ramène la matrice A à la matrice B sous forme d'échelle.

- Le nombre de lignes non nulles de B est égal au nombre de dimensions de $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$. Les vecteurs lignes non nuls de B forment la base de $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$.

2.5.6.2. Problème mathématique illustré

Dans $\mathbb{R}^4$ pour les vecteurs $\alpha_1 = (1, 2, -1, 3), \alpha_2 = (2, -1, 2, 4), \alpha_3 = (0, -5, 4, -2)$

Trouver la base et la dimension de $E = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

SOLUTIONS.

Faire une matrice A où les lignes de A sont les vecteurs de la génération de E, respectivement:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

La transformation élémentaire sur les lignes de A, on a:

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (-2), puis ajoutez à la deuxième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne.

Ainsi: $\dim E = rangA = 2$. Une base de E est $\{\alpha_1, \alpha_3\}$.

2.5.7. Trouver la base et la dimension du sous-espace racine d'un système d'équations linéaires homogènes

2.5.7.1. Méthode de résolution

Pour un système d'équations linéaires homogènes m équation, n inconnu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Pour trouver la base et la dimensionnalité du sous-espace N du système d'équations (*), nous procédons comme suit:

- Résolvez le système d'équations (*), le système d'équations a une solution générale qui dépend $n - r$ du paramètre.

- En supposant que les paramètres sont $x_{i_1},...,x_{i_{n-r}}$. Étant donné $x_{i_1}=1, x_{i_2}=0,...,x_{i_{n-r}}=0$, c'est-à-dire $\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_{n-r}}\right)=\left(1,0,...,0\right)$. En Calculant le x_i restants selon la formule de solution générale, nous obtiendrons une solution du système d'équations (*) noté par α_1.

- Avec $\left(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},...,x_{i_{n-r}}\right)=\left(0,1,0,...,0\right)...\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_{n-r}}\right)=\left(0,0,...,1\right)$, nous obtenons des solutions $\alpha_2,...,\alpha_{n-r}$. Ensuite, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-r}$ est la base de N (qui est la solution de base du système d'équations (*)).

2.5.7.2. Problème mathématique illustré

Trouver la base et la dimension du sous-espace racine N d'un système d'équations linéaires homogènes:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+x_3+x_5=0 \end{cases}$$

SOLUTIONS.

Résoudre le système d'équations donné. Transformation matricielle augmentée:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rang\,\overline{A}=3$, le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres x_2, x_5. Nous avons:

$$\begin{cases} x_4=2x_5 \\ x_3=x_4+2x_5=4x_5 \\ x_1=-2x_2-2x_4-x_5=-2x_2-5x_5 \end{cases}$$

Don, la solution générale du système d'équations est:

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-5x_5 \\ x_3=4x_5 \\ x_4=2x_5 \\ x_2,x_5\in \mathbb{R} \end{cases}$$

Choisissez: $x_2=1, x_5=0$, déduire: $x_1=-2, x_3=0, x_4=0$, on a le vecteur $\alpha_1=\left(-2,1,0,0,0\right)$.

Choisissez $x_2 = 0, x_5 = 1,$ déduire: $x_1 = -5, x_3 = 4, x_4 = 2,$ on a le vecteur $\alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$.

Ainsi, la base de l'espace des solutions N du système d'équations ci-dessus est le système $\{\alpha_1, \alpha_2\}, N = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \dim N = 2.$

2.5.8. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur appartienne à un sous-espace généré par un système vectoriel.

2.5.8.1. Méthode de résolution

Soit V un espace vectoriel et $E = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$ un sous-espace de V généré par le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que vecteur $x = (a_1, a_2, ..., a_n) \in E$ notre fasse ce qui suit:

- Avec $E = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$, on a: $x = (a_1, a_2, ..., a_n) \in E$ si et seulement si l'équation vectorielle $x = x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m \ (x_i \in \mathbb{R})$ admet une solution (1)
- L'équation (1) est équivalente à un système d'équations, trouver les conditions pour que ce système d'équations ait une solution.

2.5.8.2. Problème mathématique illustré

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ pour les vecteurs $\alpha_1 = (1, -1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \alpha_3 = (2, 0, 1, 1)$ et pour les sous-espaces $E = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$

SOLUTIONS.

Nous avons:

$x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$ si et seulement si l'équation $(a_1, a_2, a_3, a_4) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ a une solution, c'est-à-dire que le système d'équations $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] (*)$ a une solution.

Transformer le système d'équations (*):

$$(*) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & -1 & -1 & -a_1 + a_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + a_3 + a_4 \end{array}\right]$$

Le système d'équations (*) admet une solution si et seulement si: $\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$

Donc, la condition nécessaire et suffisante $x \in E$ est: $\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$

Ainsi: E est l'espace des solutions du système d'équations: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.5.9. Trouver la base et le nombre de dimensions de l'intersection et de la somme

2.5.9.1. Méthode de résolution

Pour les sous-espaces E_1, E_2 pour trouver la base et le nombre de dimensions de E_1+E_2 et $E_1 \cap E_2$ nous procédons comme suit:

- Cas 1: E_1 et E_2 sont respectivement les sous-espaces racines des systèmes d'équations linéaires homogènes: $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ b_{p1}x_1 + ... + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$

- Trouver la base de $E_1 \cap E_2$:

Puisque E_1 et E_2 sont respectivement les sous-espaces racine des systèmes d'équations ci-dessus, déduire $E_1 \cap E_2$ sont les sous-espaces racine du système d'équations:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Donc: la base de $E_1 \cap E_2$ est la solution fondamentale du système d'équations (*).

- Pour trouver la base de E_1+E_2 nous devons trouver la base de E_1 et E_2 en appliquant la méthode de recherche de la base du sous-espace des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes. Trouvez ensuite la base de E_1+E_2 .

- Cas 2: Avec $E_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle, E_2 = \langle \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \rangle$

- Trouver la base de E_1+E_2:

Trouver la base de $E_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle, E_2 = \langle \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \rangle$, puis trouver la base de $E_1 + E_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \rangle$.

- Trouver la base de $E_1 \cap E_2$:

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur appartienne à E_1, E_2 grâce aux propriétés: Avec $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \rangle$, on a: $x = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ si et seulement si l'équation vectorielle $x = x_1\alpha_1 + ... + x_m\alpha_m \left(x_i \in \mathbb{R} \right)$ a une solution, si et seulement si $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ est la solution d'un certain système d'équations linéaires homogènes. Continuez à résoudre le problème comme dans le cas 1.

2.5.9.2. Problème mathématique illustré

- **Problème 1.**

Soient E1 et E2 les sous-espaces racines des systèmes d'équations, respectivement:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \text{et} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Trouver la base et la dimension de $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$.

SOLUTIONS.

- Trouver la base et la dimension deE1+E2:

Le système d'équations $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ admet une solution générale est: $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Par conséquent, le système de solution de base est: $\alpha_1 = (1,1,1,0)$, $\alpha_2 = (1,-1,0,1)$. Donc, la base de E1 est α_1, α_2. Ainsi: $E_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

- Le système d'équations $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ admet une solution générale est: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Par conséquent, le système de solution de base est: $\beta_1 = (1,1,1,0)$, $\beta_2 = (0,0,0,1)$. Donc, la base de E2 est β_1, β_2. Ainsi: $E_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

- Parce que $E_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ et $E_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ déduire $E_1 + E_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle$
- Appliquer la méthode pour trouver la base et la dimension de $E_1 + E_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle$

On a donc le résultat $\dim(E_1 + E_2) = 3$ et $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2\}$ la base de $E_1 + E_2$.

- Trouver la base et la dimension de $E_1 \cap E_2$:

$E_1 \cap E_2$ est l'espace des solutions du système d'équations: $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Le système d'équations (*) admet une solution générale est: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ainsi, le système de solutions fondamentales de (*) est un vecteur $\gamma = (1,1,1,0)$, donc $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$. La base de $E_1 \cap E_2$ est le vecteur $\gamma = (1,1,1,0)$.

- **Problème 2**. Dans $\mathbb{R}^4$ pour les systèmes vectoriels:

$\alpha_1 = (1,2,1,1,), \alpha_2 = (3,6,5,7), \alpha_3 = (4,8,6,8), \alpha_4 = (8,16,12,20)$ et $E_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$

$\beta_1 = (1,3,1,1,), \beta_2 = (2,7,2,2), \beta_3 = (3,10,4,3), \beta_4 = (6,21,7,6)$ et $E_2 = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle$

Trouver la base et la dimension de $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$

SOLUTIONS.

- Trouver la base et la dimension deE_1+E_2:

- Appliquer la méthode pour trouver la base et le nombre de dimensions des sous-espaces générés par le système vectoriel:

$E_1 = \langle (1,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) \rangle; E_2 = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0) \rangle; \dim E_1 = \dim E_2 = 3$

Donc: $E_1 + E_2 = \langle (1,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1) \rangle$

Faire une matrice A dont les lignes sont des vecteurs de génération de E_1+E_2 et la transformation élémentaire selon de la ligne nous obtenons:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez à la quatrième ligne.

(2): Multipliez la cinquième ligne par (2), puis ajoutez à la quatrième ligne.

(3): Échangez les cinquième et deuxième lignes, supprimez la quatrième ligne. Donc, dim(E_1+E_2) = rangA = 4 et la base de E_1+E_2 est: $\{(1,2,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

- Trouver la base et la dimension de $E_1 \cap E_2$:

Pour trouver la base de $E_1 \cap E_2$, nous devons trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 \cap E_2$. Nous avons:

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1 \Leftrightarrow x=a_1(1,2,0,0)+a_2(0,0,1,0)+a_3(0,0,0,1)\left(a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x_1-x_2=0$

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_2 \Leftrightarrow x=a_1(1,0,0,1)+a_2(0,1,0,1)+a_3(0,0,1,0)\left(a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,3}\right)$

$\Leftrightarrow x_1+x_2-x_4=0$

Ainsi: $$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_1\cap E_2 \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1-x_2=0\\ x_1+x_2-x_4=0\end{cases} \quad (*)$$

Le système d'équations (*) a un système de base de solutions:

$\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(0,0,1,0)$.

Donc: la base de $E_1\cap E_2$ est α_1,α_2.

2.6. L'application linéaire

2.6.1. Prouver qu'une application donnée est linéaire (ou non linéaire).

2.6.1.1. Méthode de résolution

Soit V, V' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une application $f:V\to V'$

- Pour prouver f est une application linéaire nous prouvons f satisfaire la condition:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y), \forall x,y\in V, \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

- Pour prouver que f n'est pas l'application linéaire, il suffit de montrer que f la condition n'est pas satisfaite:

$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in V$ ou $f(\lambda x)=\lambda f(x), \forall x\in V, \forall\lambda\in\mathbb{R}$

2.6.1.2. Problème mathématique illustré

- **Problème.**

Considérez quelle l'application est linéaire?

$$a)\ f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f_1(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_2-x_3)$$
$$b)\ f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+4,x_3)$$
$$c)\ f_3:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x],\ f_3(p(x))=p'(x)$$

Avec $p'(x)$ est la dérivée du polynôme $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$

SOLUTIONS.

$a)$ Appelez $u=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, v=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Nous avons:

$$\begin{aligned}f_1(\lambda u+\mu v)&=f_1(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_3+\mu y_3)\\&=(2\lambda x_1+2\mu y_1+\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_2+\mu y_2-\lambda x_3-\mu y_3)\\&=((2\lambda x_1+\lambda x_2)+(2\mu y_1+\mu y_2),(\lambda x_2-\lambda x_3)+(\mu y_2-\mu y_3))\end{aligned}$$

$$=(2\lambda x_1+\lambda x_2,\lambda x_2-\lambda x_3)+(2\mu y_1+\mu y_2,\mu y_2-\mu y_3)$$
$$=\lambda(2x_1+x_2,x_2-x_3)+\mu(2y_1+y_2,y_2-y_3)=\lambda f_1(u)+\mu f_1(v)$$

Donc: f_1 est une application linéaire.

$b)$ Nous avons: $u=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3,\lambda=2\in\mathbb{R}$.

Cependant: $f_2(\lambda u)=f_2(2,4,6)=(6,8,6);\lambda f_2(u)=2(3,6,3)=(6,12,6)$

Donc: $f_2(2u)\neq 2f_2(u)$. Ainsi: f_2 n'est pas l'application linéaire.

$c)$ En appelant $p(x),q(x)$ des polynômes arbitraires de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a:

$$f_3(\lambda p(x)+\mu q(x))=(\lambda p(x)+\mu q(x))'$$
$$=\lambda p'(x)+\mu q'(x)=\lambda f_3(p(x))+\mu f_3(q(x))$$

Donc: f_3 est une application linéaire.

2.6.2. Déterminer l'expression d'une application linéaire lorsque l'image d'une base à travers cette application est connue

2.6.2.1. Méthode de résolution

Soit une application linéaire $f:V\to U$ satisfaire $f(\alpha_i)=\beta_i\ (i=\overline{1,n})$ avec $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\ (\alpha)$ se trouve la base de V et $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ sont des vecteurs de U. Pour trouver l'expression de l'application linéaire f nous procédons comme suit:

- Trouver les coordonnées du vecteur $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ tout dans la base (α), c'est à dire trouver $a_i\in\mathbb{R}\ (i=\overline{1,n}):(x_1,x_2,...,x_n)=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n\ (1)$. Nous avons:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=a_1f(\alpha_1)+a_2f(\alpha_2)+...+a_nf(\alpha_n)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+...+a_n\beta_n\quad(2)$$

- À partir de (1): il faut calculer $a_1,a_2,...,a_n$ d'après $x_1,x_2,...,x_n$, puis en substituant (2) on obtient l'expression de l'application f.

2.6.2.2. Problème mathématique illustré

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ pour la base $\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(0,1,1),\alpha_3=(1,0,1)$ et dans $\mathbb{R}^2$ pour 3 vecteurs $\beta_1=(1,2),\beta_2=(1,0),\beta_3=(0,-1)$.

Définissez une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$: $f(\alpha_i)=\beta_i\ (i=\overline{1,3})$.

SOLUTIONS.

Supposer: $(x_1,x_2,x_3)=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3\ (1)\quad(a_i\in\mathbb{R},i=\overline{1,3})$

Alors: $f(x_1,x_2,x_3)=a_1f(\alpha_1)+a_2f(\alpha_2)+a_3f(\alpha_3)$

$$= a_1(1,2) + a_2(1,0) + a_3(0,-1) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_3)\ (2)$$

Nous avons: $(1) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = a_1(1,1,0) + a_2(0,1,1) + a_3(1,0,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = x_1 \\ a_1 + a_2 = x_2 \\ a_2 + a_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ a_2 = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \ (*) \\ a_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

En remplaçant (*) dans (2) on obtient: $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \right)$

2.6.3. Trouver la base et la dimensionnalité de la noyau et l'image de une application linéaire

2.6.3.1. Méthode de résolution

Pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)$$

- Trouver la base de $\ker f$:

- *Kerf* est le sous-espace racine d'un système d'équations linéaires homogènes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

- La base de *Kerf* est la solution fondamentale du système d'équations (*).

- Trouver la base de $\operatorname{Im} f$:

- Trouver l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

  Nous avons: $\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) \rangle$

- Le sous-système maximal linéairement indépendant de $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

2.6.3.2. Problème mathématique illustré

Pour l'application linéaire:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 - x_3 + x_4)$$

Trouver la base, la dimension de $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$.

SOLUTIONS.

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\ker f \Leftrightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)$ est la solution du système

d'équations: $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_4=0 \\ 2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$ (1)

Donc, $\ker f$ être un sous-espace des solutions du système (1) et la solution fondamentale du système (1) est une base de $\ker f$. Pour résoudre le système (1), on transforme la matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent du paramètre x_4.

Nous avons:

$$\begin{cases} x_3=0 \\ x_2=\dfrac{1}{2}(2x_3-x_4)=\dfrac{-1}{2}x_4 \\ x_1=x_2-x_3=\dfrac{-1}{2}x_4 \end{cases}$$

Donc, la solution générale du système d'équations est: $\begin{cases} x_1=-a \\ x_2=-a \\ x_3=0 \\ x_4=2a \end{cases}$

Le système de solution fondamental $\alpha_1=(-1,-1,0,2)$, donc $\dim\ker f=1$, la base de $Kerf$ est $\alpha_1=(-1,-1,0,2)$.

- Pour trouver la base de $\operatorname{Im} f$, on retrouve l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a:

$$f(e_1)=(1,2,0),\ f(e_2)=(-1,0,2),\ f(e_3)=(1,0,-1),\ f(e_4)=(0,1,1)$$

$$\operatorname{Im} f=\langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\rangle$$

Le sous-système maximal linéairement indépendantde $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Nous avons: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$

Donc, la base de $\operatorname{Im} f$ est: $f(e_1), f(e_4), f(e_3), \dim f = 3.$

2.6.4. Trouver la matrice d'une application linéaire dans une paire de bases

2.6.4.1. Méthode de résolution

Donnez V et U sont des espaces vectoriels, $f: V \to U$ est une application linéaire, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ (\alpha)$ est la base de V, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\ (\beta)$ est la base de U. Pour déterminer la matrice de l'application linéaire f dans la paire de bases, $(\alpha),(\beta)$ nous procédons comme suit:

- Parce que $f(\alpha_i) \in U$ déduire $f(\alpha_i)$ être exprimé linéairement par la base (β), nous avons donc:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1) = a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1m}\beta_m \ (1) \\ &f(\alpha_2) = a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2m}\beta_m \ (2) \\ &.. \\ &f(\alpha_n) = a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + ... + a_{nm}\beta_m \ (n) \end{aligned}$$

Alors, la matrice de f dans la paire de bases $(\alpha),(\beta)$ est: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$

- Résolvez les équations vectorielles (1), (2), …,(n), pour déterminer $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}.$

2.6.4.2. Problème mathématique illustré

Pour une application linéaire:

$$\begin{aligned} &f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, -x_2) \end{aligned}$$

Trouvez la matrice de f dans la paire de bases $(\alpha),(\beta)$ comme suit:

$$\begin{aligned} &(\alpha):\ \alpha_1 = (1,1), \quad \alpha_2 = (1,0) \\ &(\beta):\ \beta_1 = (1,1,1), \quad \beta_2 = (-1,2,1), \quad \beta_3 = (1,3,2) \end{aligned}$$

SOLUTIONS.

- Supposer:

$$f(\alpha_1) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 \quad (1)$$
$$f(\alpha_2) = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \quad (2)$$

Alors, la matrice de f dans la paire de bases $(\alpha),(\beta)$ est:

$$A_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

- Nous devons résoudre les équations vectorielles (1), (2) pour trouver a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3. Les équations (1), (2) sont équivalentes à des systèmes d'équations linéaires dont les matrices augmentée sont les matrices suivantes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right]$$

Le système d'équations (1) admet une solution: $a_3 = 6, a_2 = 1 - a_3 = -5, a_1 = 3 + a_2 - a_3 = -8$

Le système d'équations (2) admet une solution: $b_3 = 3, b_2 = 1 - b_3 = -2, b_1 = 1 + b_2 - b_3 = -4$

Ainsi: $$A_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2.6.5. Trouver des polynômes de caractéristiques, des valeurs propres, des vecteurs propres, des sous-espaces propres d'une matrice

2.6.5.1. Méthode de résolution

Soit A une matrice carrée d'ordre n: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Pour trouver les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres de la matrice A, nous procédons comme suit:

Étape 1: Mettre en place le polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda_1 + a_0$$

Étape 2: Résolvez l'équation: $P_A(\lambda) = 0$ pour trouver les valeurs propres de A.

Étape 3: Pour chaque valeur propre λ de A, créez un système d'équations:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ ....\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}\quad(*)$$

- Résoudre le système d'équations (*) pour trouver la solution générale, trouvant ainsi les sous-espaces propre de A correspondant aux valeurs propres λ.
- Les vecteurs propres non nuls qui sont les solutions du système d'équations (*) sont les vecteurs propres de la matrice A correspondant aux valeurs propres λ.
- Les vecteurs formant la solution fondamentale du système d'équations (*) sont les vecteurs propres linéairement indépendants de A correspondant aux valeurs propres λ.

2.6.5.2. Problème mathématique illustré

Trouver les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres d'une matrice:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

SOLUTIONS.

Étape 1:Nous avons: $P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2$

Donc, le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda+2$

Étape 2: $P_A(\lambda)=0\Leftrightarrow-\lambda^3+3\lambda+2=0\Leftrightarrow(\lambda+1)^2(2-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=-1,\lambda=2$

Donc, la matrice A, a 2 valeurs propres $\lambda=-1,\lambda=2$.

Étape 3:Pour trouver les vecteurs propres de A, on considère deux cas:

- Pour la valeur propre $\lambda=-1$, on résout le système d'équations: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{array}\right]$

- Le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres x_2,x_3. La solution générale est $x_1=-a-b,x_2=a,x_3=b\ (a,b\in\mathbb{R})$. Donc, les sous-espaces propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda=-1$ est $V_{-1}=\{(-a-b,a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$.
- Les vecteurs propres de A à valeurs propres $\lambda=-1$ sont tous des vecteurs de la forme: $(-a-b,a,b)$ avec $a^2+b^2\neq0$ (car le vecteur propre doit être non nul).

- Nous avons: $\dim V_{-1} = 2$ et A, a deux vecteurs propres linéairement indépendant est: $\alpha_1 = (-1,1,0), \alpha_2 = (-1,0,1)$.

- Pour la valeur propre $\lambda = 2$, on résout le système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Le système d'équations a une infinité de solutions dépendantes x_3. La solution générale est $x_1 = a, x_2 = a, x_3 = a \ (a \in \mathbb{R})$. Donc, les sous-espaces propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 2$ est $V_2 = \{(a,a,a) | a \in \mathbb{R}\}$.

- Les vecteurs propres de A à valeurs propres $\lambda = 2$ sont tous des vecteurs de la forme: (a,a,a) avec $a \neq 0$.

- Nous avons: $\dim V_2 = 1$ et A, a un vecteur propre linéairement indépendantest $\alpha_3 = (1,1,1)$.

2.6.6. Croisement matriciel

2.6.6.1. Méthode de résolution

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour diagonaliser la matrice A, nous procédons comme suit:

Étape 1: Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres linéairement indépendants de A.

Étape 2: Conclusion

- Si la somme des vecteurs propres linéairement indépendants de A est inférieur à n (c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} < n$ où V_{λ_i} est un sous-espace propre correspondant aux valeurs propres λ_i) alors nous concluons que la matrice A n'est pas diagonalisable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas T de $T^{-1}AT$ matrice diagonale.
- Si la somme des vecteurs propres linéairement indépendants de A est n (c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = n$, où V_{λ_i} est un sous-espace propre correspondant aux valeurs propres λ_i) alors on peut en conclure que la matrice A est diagonalisable. Alors la matrice T à rechercher est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres linéairement indépendants de A écrits en colonnes, et alors,

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

est une matrice diagonale, où λ_i est la valeur propre de A.

2.6.6.2. Problème mathématique illustré

Croisement matriciel $$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUTIONS.

Étape 1: Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres linéairement indépendants de A.

D'après les résultats du problème de la section 2.6.5.2 nous avons: la matrice A a deux valeurs propres $\lambda=-1, \lambda=2$ et A, a 3 vecteurs propres linéairement indépendants $\alpha_1=(-1,1,0), \alpha_2=(-1,0,1), \alpha_3=(1,1,1)$.

Étape 2: Conclusion

- La matrice A est diagonalisable.
- La matrice requise est:

$$T=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ et } \qquad T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

2.6.7. Trouver la base pour que la matrice d'une transformation linéaire dans cette base soit une matrice diagonale

2.6.7.1. Méthode de résolution

Donner V est un espace vectorielle de n dimension et soyons $f:V\to V$ une transformation linéaire. Supposons que $(U):u_1,u_2,...,u_n$ est la base de V et $A=A_{f/(U)}$ est la matrice de f dans la base U . Vous voulez trouver la base de V sorte que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale, nous procédez comme suit:

1. *Étape 1*:Trouver la matrice de f dans la base $(U):u_1,u_2,...,u_n$
2. *Étape 2:* Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A et de f .

- Les valeurs propres de A sont aussi les valeurs propres de f .

- Si $(a_1, a_2, ..., a_n)$ c'est un vecteur propre de A correspondant à une valeur propre λ_0, alors c'est $a_1u_1 + ... + a_nu_n$ un vecteur propre de f correspondant à une valeur propre λ_0. À partir de là, trouvez les vecteurs propres linéairement indépendants de f.

3. *Étape 3:* Conclusion

- Si f il y a moins de n vecteurs propres linéairement indépendants, (n=dim V) alors il n'y a aucune base f pour que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale.

- Si f ilexiste un n vecteur propre linéairement indépendant est $(\beta): \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, alors ce n vecteur propre linéairement indépendant est la base (β) de V et la matrice de f dans la base (β) c'est une matrice diagonale. Spécifiquement:

$$A_{f/(\beta)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Où λ_i est la valeur propre correspondant au vecteur propre β_i (ceux-ci λ_i peuvent être égaux).

2.6.7.2. Problème mathématique illustré

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la base: $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)$

Et permet la transformation linéaire f définie par:

$$f(u_1) = (4,3,2),\ f(u_2) = (4,3,1),\ f(u_3) = (1,0,0)$$

Trouvez la base pour que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale.

SOLUTIONS.

1. Étape 1*:* Trouver la matrice de f dans la base (U)

On résout 3 systèmes d'équations et on obtient:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 - a_1 = 1 \\ a_3 = 4 - a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 3 - b_1 = 2 \\ b_3 = 4 - b_1 - b_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -c_1 = 0 \\ c_3 = 1 - c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

Ainsi: $$A_{f/(U)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Étape 2:Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A et de f.

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right]=(1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=1, \lambda=3$$

Donc, A a deux valeurs propres $\lambda=1, \lambda=3$

Ainsi: f il y a deux valeurs propres de $\lambda=1, \lambda=3$.

- Les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\lambda=1$ sont les solutions du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres x_2, x_3.

La solution générale du système d'équations est: $x_1=-a, x_2=a, x_3=b.$

Un vecteur propre de A, avec une valeur propre $\lambda=1$ est: $(-a,a,b), a^2+b^2\neq 0.$

Dans ce cas, A il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants: $\alpha_1=(-1,1,0)$ et $\alpha_2=(0,0,1)$.

Donc, les vecteurs propres des f de la forme: $-au_1+au_2+bu_3=(b,0,-a), a^2+b^2\neq 0$

Dans ce cas, f Il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants:

$\beta_1=-u_1+u_2+0u_3=(0,0,-1)$
$\beta_2=0u_1+0u_2+u_3=(1,0,0)$

- Les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\lambda=3$ sont les solutions du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions en fonction d'un paramètre x_2.

La solution générale du système d'équations est: $x_1=a, x_2=a, x_3=a.$

Un vecteur propre de A, avec une valeur propre $\lambda=3$ est: $(a,a,a), a\neq 0.$

Dans ce cas, A il existe un vecteur propre linéairement indépendant est: $\alpha_3=(1,1,1)$.

Donc, les vecteurs propres des f de la forme: $au_1 + au_2 + au_3 = (3a, 2a, a), a \neq 0.$

Dans ce cas, f il existe un vecteur propre linéairement indépendant: $\beta_3 = (3, 2, 1)$.

3. *Étape 3:* Conclusion

f il existe trois vecteurs propres linéairement indépendants β_1, β_2 (pour $\lambda = 1$) et β_3 (pour $\lambda = 3$). Donc, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ formez la base $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de f dans la base $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ est une matrice diagonale. Spécifiquement:

$$A_{f/(\beta)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Conclusion du chapitre 2.

Les résultats de recherche de ce chapitre, nous présentions détaillé des formes mathématiques typiques et des méthodes solutions correspondantes, ainsi que des problèmes illustratifs. Ces méthodes de résolution de problèmes, qui seront appliquées de manière créative pour résoudre des problèmes avancés, des problèmes similaires, sont présentées au chapitre 3.

Chapitre 3. QUELQUES TYPES DE PROBLÈMES AVANCÉS

Objectifs du chapitre

Chaque année, l'Association mathématique du Vietnam organise l'Olympiade nationale de mathématiques pour les étudiants. La plupart des universités du pays participent à la proposition de questions d'examen proposées sur des problèmes d'algèbre linéaire, à partir desquelles le comité d'organisation sélectionne les questions d'examen officielles pour chaque examen.

Par conséquent, dans ce chapitre, nous utiliserons les méthodes solutions mathématiques présentées au chapitre 2 pour résoudre des problèmes similaires ainsi que ceux des questions d'examen proposées et officielles des étudiants de l'Olympiade de mathématiques. De plus, nous avons également résolu certains problèmes dans les questions d'examen officielles lors de l'examen d'entrée au Master en mathématiques de l'Université d'éducation de Ho Chi Minh City, au Vietnam.

À partir de là, il répondra à la question 3: *Comment les méthodes proposées pour résoudre des problèmes de mathématiques typiques sont-elles appliquées à la résolution de problèmes similaires et de problèmes avancés?*

Les connaissances présentées dans le chapitre sont référencées dans les documents: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [18], [25], [26], [27], [28], [29].

3.1. Problèmes liés aux déterminants

- **Problème 1.**

Calcul du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Utilisationtransformation élémentaire pour transformer la deuxième colonne sous forme d’occurrences multiples d’éléments nuls, à partir de laquelle il est plus pratique de développer le déterminant par cette colonne. Donc, pour résoudre le problème, nous utiliserons deux méthodes simultanément: *Développement de colonne et la transformation élémentaire* .

SOLUTIONS.

$$D \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(4)}{=} (-1).(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Expliquer:

(1): Multipliez la deuxième ligne par (-2), puis ajoutez à la troisième ligne. Multipliez la deuxième ligne par (-1), puis ajoutez à la cinquième ligne.

(2): Développez sur la deuxième colonne.

(3): Multipliez la première colonne par (-1), puis ajoutez à la troisième colonne, multipliez la première colonne par (2) et ajoutez à la quatrième colonne.

(4): Développez sur la quatrième ligne.

- **Problème 2.**

Calcul du déterminant $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, nous allons séparer le déterminant par colonne n, puis utiliser les méthodes de transformation élémentaire et inductive.

SOLUTIONS.

Séparer le déterminant par colonne n, nous avons:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

En développant le premier déterminant par la colonne (n) nous obtenons le déterminant D_{n-1}. Multipliez la colonne (n) du second déterminant par $(-b_i)$ puis ajouter à la colonne $i\left(i=1,2,...,n-1\right)$ nous obtenons:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Et nous avons la formule récursive $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Comme la formule est vraie pour tout n, on a: $D_n = D_{n-1} + a_n b_n = \left(D_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1}\right) + a_n b_n = ... = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n$

Nous avons, $D_1 = a_1 b_1 + 1$. Ainsi, $D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n$

- **Problème 3. (**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2001)

Donner $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Calculer le déterminant de l'ordre n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Si nous développons le déterminant selon la première ligne, nous obtiendrons une formule de récurrence. Pour résoudre le problème, nous utiliserons *la méthode de développement de ligne, de colonne et inductive.*

SOLUTIONS.

En développant le déterminant selon la première ligne, nous obtenons:

$$D_n = \left(a+b\right) D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la première colonne, nous avons la formule:

$D_n = \left(a+b\right) D_{n-1} - abD_{n-2}$ avec $n \geq 3 \quad (*)$

Ainsi: $D_n - aD_{n-1} = b\left(D_{n-1} - aD_{n-2}\right)$

Cette formule est vraie pour tout $n \geq 3$, nous avons donc:

$$D_n - aD_{n-1} = b\left(D_{n-1} - aD_{n-2}\right) = b^2\left(D_{n-2} - aD_{n-3}\right) = ... = b^{n-2}\left(D_2 - aD_1\right)$$

Calcul direct nous avons: $D_2 = a^2 + b^2 + ab; D_1 = a + b; D_2 - aD_1 = b^2$

Ainsi, $D_n - aD_{n-1} = b^n \quad (1)$

En continuant de la formule (*) nous avons: $D_n - bD_{n-1} = a\left(D_{n-1} - bD_{n-2}\right)$. Puisque cette formule est vraie pour tout $n \geq 3$, nous avons:

$$D_n - bD_{n-1} = a\left(D_{n-1} - bD_{n-2}\right) = a^2\left(D_{n-3} - bD_{n-4}\right)$$
$$= ... = a^{n-2}\left(D_2 - bD_1\right) = a^n$$

(Car $D_2 - bD_1 = a^2$)

Donc, $D_n - bD_{n-1} = a^n \quad (2)$

De (1) et (2) on obtient les résultats suivants: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

- **Problème 4.** Calcul du déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & ... & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & 1+a_n \end{vmatrix}$

ANALYSE.

Si toutes les colonnes restantes du déterminant sont ajoutées à la première colonne, alors la première colonne aura tous les mêmes éléments, transformant ainsi le déterminant en forme triangulaire. Pour résoudre le problème, nous utiliserons *la méthode de transformation élémentaire.*

SOLUTIONS.

$$D_n \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+...+a_n & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ 1+a_1+...+a_n & 1+a_2 & a_3 & ... & a_n \\ 1+a_1+...+a_n & a_2 & 1+a_3 & ... & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+...+a_n & a_2 & a_3 & ... & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+...+a_n & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + a_1 + ... + a_n$$

Expliquer:

(1): Ajouter les colonnes (2), (3),…,(n) à la colonne (1).

(2): Multipliez la ligne (1) par (-1), puis ajoutez aux lignes (2), (3), …, (n).

- **Problème 5.** Calcul du déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

ANALYSE.

Si vous multipliez la première ligne par $(-x)$ puis ajoutez toutes les lignes restantes et à partir de là, transformez le déterminant en forme triangulaire. Pour résoudre le problème, nous utilisons *la méthode de transformation élémentaire.*

SOLUTIONS.

Avec $x \neq 0$ nous avons:

$$D \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n-1}{x}(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}\,(n \geq 2)$$

Expliquer:

(1): Multipliez la ligne (1) par $(-x)$ et ajoutez à la ligne (2), (3), …,(n).

(2): Multipliez la colonne (2), (3),…,(n) par $\frac{1}{x}$ puis ajoutez le tout à la colonne (1).

Si $x = 0$ alors réponse ci-dessus est toujours correcte en raison de la continuité du déterminant.

- **Problème 6.**

Calcul du déterminant $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}$

ANALYSE.

À partir des caractéristiques des éléments de la matrice, nous pouvons exprimer la matrice donnée comme un produit de matrices plus simples. Par conséquent, pour résoudre le problème, nous utiliserons *la méthode de représentation des déterminants en tant que produits de déterminants.*

SOLUTIONS.

Avec $n \geq 2$ nous avons:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \dots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Ainsi: $D = \det A = \det(BC) = \det B.\det C$

$D = 0$ si $n > 2$; $D = \sin(\alpha_2 - \alpha_1).\sin(\beta_2 - \beta_1)$ si $n = 2$

- **Problème 7.** Calcul du déterminant d'ordre 2 n

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ (n) \\ \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n) \end{matrix}$$

ANALYSE.

Les éléments du déterminant ont la caractéristique de transformer le déterminant donné en une forme triangulaire. Par conséquent, l'utilisation de *la méthode de transformation élémentaire* trouvera la solution.

SOLUTIONS.

Considérant $a_1, a_2, ..., a_n$ que tous sont non nuls:

- Multipliez la ligne (1) par $\frac{-c_1}{a_1}$ puis ajoutez à la ligne $(n+1)$.
- Multipliez la ligne (2) par $\frac{-c_2}{a_2}$ puis ajoutez à la ligne $(n+2)$.

……………………………………………………………………..

- Multipliez la ligne (n) par $\frac{-c_n}{a_n}$ puis ajoutez à la ligne $(2n)$. Nous avons:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \frac{a_1d_1 - b_1c_1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \frac{a_2d_2 - b_2c_2}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \frac{a_nd_n - b_nc_n}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= (a_1d_1 - b_1c_1)\dots(a_nd_n - b_nc_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Lorsque les nombres sont $a_1, a_2, \dots, a_n$ égal à 0, en raison de la continuité du déterminant, la formule ci-dessus est toujours valable.

Donc, nous avons: $$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Commentaire: Le problème ci-dessus peut être résolu par *la méthode d'induction*. En développant le déterminant par la ligne n, puis en développant les déterminants d'ordre $2n-1$qui vient d'être reçue selon la ligne $2n-1$, nous aurons la formule de récurrence:

$D_{2n} = (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} \quad \forall n \geq 2$. Donc, nous avons:

$$D_{2n} = (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} = (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)}$$

$$= \dots = (a_nd_n - b_nc_n)\dots(a_2d_2 - b_2c_2)D_1 = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

- **Problème 8.**

Calcul du déterminant $$D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Les éléments du déterminant ont la caractéristique de transformer le déterminant donné en une forme triangulaire. Par conséquent, *la méthode de transformation élémentaire* peut être utiliséepour résoudre le problème.

SOLUTIONS.

Ajouter les colonnes $(1),(2),(3),...,(n)$ Dans la colonne $(n+1)$, on obtient:

$$D=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

En développant D par la colonne $(n+1)$, on obtient:

$$D=(n+1)\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -a_n \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)a_1a_2...a_n.$$

- **Problème 9.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

Calcul du déterminant $$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2022 & 2023 \\ 2 & 1 & 2 & ... & 2021 & 2022 \\ 3 & 2 & 1 & ... & 2020 & 2021 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2023 & 2022 & 2021 & ... & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

À partir des caractéristiques élémentaires du déterminant. Pour résoudre le problème, nous utilisons simultanément deux méthodes: *La transformation élémentaire et le développement de ligne.*

SOLUTIONS.

$$D\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2022 & 2024 \\ 2 & 1 & 2 & ... & 2021 & 2024 \\ 3 & 2 & 1 & ... & 2020 & 2024 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2023 & 2022 & 2021 & ... & 2 & 2024 \end{vmatrix}=2024\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2022 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & ... & 2021 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & ... & 2020 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2023 & 2022 & 2021 & ... & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} 2024\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 2022 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & ... & -1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2024\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ 1 & 1 & -1 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} 2024\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 2 & 2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{vmatrix} = -2024.2^{2021}$$

Expliquer:

(1): Ajouter la première colonne à la colonne 2023.

(2): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez à la deuxième ligne, multipliez la deuxième ligne par (-1), puis ajoutez à la troisième ligne,…, multipliez la ligne 2022 par (-1), puis ajouter la ligne 2023.

(3): Ajoutez la ligne 2022 à la première ligne, ajoutez la ligne 2022 à la deuxième ligne,..., ajoutez la ligne 2022 à la ligne 2021.

- **Problème 10.(**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2022)

Calcul du déterminant
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

À partir des caractéristiques des déterminants,nous pouvons transformer le déterminant donné en une forme triangulaire. Pour résoudre le problème, deux méthodes peuvent être utilisées simultanément: *La transformation élémentaire et le développement de ligne*.

SOLUTIONS.

Nous avons: $$D_n = (-1)^{2n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2n} + (-1)^{n+1}$$

Si n impair alors $D_n = 2.$ Si n pair alors $D_n = 0.$

- **Problème 11.(**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2017)

Soit une suite (x_n) définie comme suit: $x_1 = 3,\ x_2 = 7$ et $x_n, n \geq 3$ soit le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n suivant:

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$a)$ Calculer x_5

$b)$ Prouver que $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

$c)$ Montrer que pour chaque $n > 0,\ x_n + 1$ est un nombre naturel et une puissance de 2.

ANALYSE.

À partir des exigences du problème, il est suggéré que la principale méthode de résolution consiste à utiliser *la méthode inductive* .

SOLUTIONS.

$a)$ Calculé: $x_3 = 15, x_4 = 31, x_5 = 63.$

$b)$ En développant sur la première ligne, on obtient:

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant est égal x_{n-1}, au second déterminant est égal x_{n-2}.

Nous avons: $$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

$c)$ On a: $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Donc:

$$x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2}) = 4(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = 2^{n-2}(x_2 - x_1) = 2^{n-2}(7-3) = 2^n.$$

Déduire: $x_n - 3 = x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + ... + (x_2 - x_1) = 2^n + ... + 2^2$

Donc: $x_n = 2^n + ... + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow x_n + 1 = 2^{n+1}$, pour tout n.

- **Problème 12.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2019)

Soit une suite (x_n) définie comme suit: $x_1 = 5,\ x_2 = 19$ et $x_n,\ n \geq 3$ soit le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n suivant:

$$x_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$a)$ Calculer $x_{5.}$

$b)$ Prouvez $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$.

$c)$ Montrer $x_n - 1$ qu'il est divisible par 4 avec n impair.

ANALYSE.

À partir des exigences du problème, il est suggéré que la principale méthode de résolution consiste à utiliser *la méthode inductive*.

SOLUTIONS.

$a)$ Calculé: $$x_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 665$$

$b)$ En développant le déterminant selon la première ligne, nous avons: $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$, pour tout $n \geq 3$.

$c)$ Nous avons: $$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \quad (*)$$

De (*), implique:

$$x_n - 2x_{n-1} = 3x_{n-1} - 6x_{n-2} = 3(x_{n-1} - 2x_{n-2}) = 3^2(x_{n-2} - 2x_{n-3}) = ... = 3^{n-2}(x_2 - 2x_1) = 3^{n-2}.9 = 3^n \ (1)$$

D' autre part, de (*), nous avons:

$$x_n - 3x_{n-1} = 2x_{n-1} - 6x_{n-2} = 2(x_{n-1} - 3x_{n-2}) = 2^2(x_{n-2} - 3x_{n-3}) = ... = 2^{n-2}(x_2 - 3x_1) = 2^{n-2}.4 = 2^n \ (2)$$

De (1) et (2) il résulte que: $x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Cas impair n, déduire $n+1$pair, mettre $n+1=2k$. Nous avons:

$$x_n-1=(4-1)^{2k}-2^{2k}-1=\sum_{i=0}^{2k}C_{2k}^{i}4^{i}(-1)^{2k-i}-4^{k}-1$$

$$=\left(1-C_{2k}^{1}4+C_{2k}^{2}4^{2}-C_{2k}^{3}4^{3}+...+4^{2k}\right)-4^{k}-1$$

$$=-C_{2k}^{1}4+C_{2k}^{2}4^{2}-C_{2k}^{3}4^{3}+...+4^{2k}-4^{k}$$

Donc, pour n impair, il est x_n-1 divisible par 4.

- **Problème 13.(**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2003)

Pour matrice $$A=\begin{bmatrix}1+x_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4\end{bmatrix}$$

Où x_1,x_2,x_3,x_4 sont les solutions du polynôme $f(x)=x^4-x+1$. Calculer $\det A$.

ANALYSE.

Le déterminant donné a la particularité d'être transformé en une forme sommative plus facile à calculer. Plus précisément, de nouveaux déterminants, après avoir été développés en lignes, en colonnes ou après avoir effectué des transformations élémentaires, peuvent être remis sous *forme triangulaire*. Donc, pour résoudre le problème, nous utiliserons trois méthodes simultanément:*Représentation des déterminants sous forme de somme de déterminants, développement de lignes, transformation élémentaire.*

SOLUTIONS.

Nous avons: $$\det A=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&x_2&0&0\\1&0&x_3&0\\1&0&0&x_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&x_3&0\\0&1&0&x_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&0&1&0\\0&x_2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&x_4\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}x_1&0&0&1\\0&x_2&0&1\\0&0&x_3&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1&0&0&0\\0&x_2&0&0\\0&0&x_3&0\\0&0&0&x_4\end{vmatrix}$$

$$=x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3x_4.$$

En utilisant le théorème de Viète pour le polynôme $f(x)$ nous obtenons: $\det A=2$.

- **Problème 14.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2018)

Pour les nombres naturels $n \geq 3$ et pour n les nombres réels $x_1, x_2, ..., x_n$. Calculez le déterminant suivant:

$$D = \begin{vmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 & ... & \sin x_n \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right) & ... & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_2\right) & ... & \cos\left(\frac{\pi}{8} - x_n\right) \\ ... & ... & ... & ... \\ \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_2\right) & ... & \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - x_n\right) \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Le déterminant donné a la particularité de pouvoir transformer la forme produit de deux déterminants et de trouver le résultat immédiatement. Par conséquent, résolvez le problème en utilisant la méthode:*Représentation du déterminant en tant que produit de déterminants*.

SOLUTIONS.

Nous avons: $$D = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 & ... & 0 \\ \cos\frac{\pi}{2^2} & \sin\frac{\pi}{2^2} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \cos\frac{\pi}{2^n} & \sin\frac{\pi}{2^n} & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos x_1 & \cos x_2 & ... & \cos x_n \\ \sin x_1 & \sin x_2 & ... & \sin x_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- **Problème 15.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2018)

Calculer $$\lim_{n\to\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & ... & 0 & \frac{1}{n!} \\ -1 & x & 0 & ... & 0 & \frac{1}{n!} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x & \frac{1}{n!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & -n & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Étant donné que les éléments du déterminant dans la dernière colonne sont les mêmes, lors de l'utilisation de la méthode de transformation élémentaire et de la méthode développement de ligne, puis obtenir un déterminant sous *la forme d'un triangle*. Par conséquent, pour résoudre le problème, *deux méthodes de transformation élémentaire et de développement de ligne* doivent être utilisées.

SOLUTIONS.

Nous avons:

$$\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n!} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n!} \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & \frac{1}{n!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \frac{1}{n!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & \frac{1}{n!} \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}A_n$$

Multipliez la ligne i par $\frac{1}{(i-1)!}.x^{i-1}\left(i=2,3,\dots,n+1\right)$, puis ajoutez à la première ligne toutes les lignes restantes. Ensuite nous avons:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n(x) \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix}$$

Avec $R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

De là déduit $A_n = R_n(x).(-1)^{n+1+1}(-1)^n.n!$

Ainsi: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}A_n = \lim_{n\to\infty}R_n(x) = e^x$.

- **Problème 16.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2018)

Calculer le déterminant d'une matrice carrée $A=\left(a_{ij}\right)$ d'ordre $n\times n$avec:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, \forall i \neq j \\ 2, \forall i = j \end{cases}$$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, nous devons d'abord spécifier les éléments du déterminant, puis utiliser une *transformation élémentaire* qui ramène le déterminant à une *forme triangulaire*.

SOLUTIONS.

En ajoutant la deuxième ligne à la première ligne, la troisième ligne à la deuxième ligne, …, la ligne n à la ligne $n-1$, nous avons:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \ldots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & \mp 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Multipliez la première colonne par (-1), puis ajoutez à la deuxième colonne, multipliez le résultat obtenu de la deuxième colonne par (-1), puis ajoutez à la troisième colonne, et ainsi de suite nous obtenons:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \pm 1 & \mp 2 & \pm 3 & \ldots & -n+1 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

- **Problème 17.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2018)

Soit n un entier positif impair. Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n satisfaisant $\det A = 1$ ou $\det A = -1$. Soit $A^{'}$ la matrice obtenue A en remplaçant chaque élément par son complément algébrique. Calculer $\det A^{'}$.

ANALYSE.

La méthode principale pour résoudre le problème est*méthode pour représenter les déterminants comme des produits de déterminants.*

SOLUTIONS.

En développant le déterminant sur la ligne, on a:

$$A.\left(A^{'}\right)^{t} = \det(A).I_n$$

Déduire: $$\det\left(A.\left(A^{'}\right)^{t}\right) = (\det A)^{n} \quad (1)$$

D'autre part, nous avons: $\det\left(A^{'}\right)^{t} = \det A^{'}, \det\left(A.\left(A^{'}\right)^{t}\right) = \det A.\det\left(A^{'}\right)^{t}$ (2)

De (1) et (2), déduire: $\left(\det A\right)^{n} = \det A.\det A^{'} \Rightarrow \det A^{'} = \left(\det A\right)^{n-1} = \left(\pm 1\right)^{n-1} = 1.$

- **Problème 18.(**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2018)

Étant donné un nombre réel a et un entier $n > 0$. Considérons des matrices carrées d'ordre n:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}$$

Calculer le déterminant de *A*.

ANALYSE.

Si nous développons le déterminant selon la première colonne, nous aurons une formule de récurrence. Donc, pour résoudre le problème, nous utiliserons la méthode: *En développant par la colonne et d'induction.*

SOLUTIONS.

Mettre: $$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

En développant par la première colonne, nous obtenons:

$$D_n = aD_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1).\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

Nous avons:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Ainsi: $D_n = a.D_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2} = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = a^n - \frac{1}{6}a^{n-2}(n-1)n(n+2).$

- **Problème 19.(**Extrait de l'examen officiel de l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2005)

Considérons une matrice de la forme $A=\begin{bmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_2 & x_2^2+1 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2+1 & x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & x_4^2+1 \end{bmatrix}$. Prouver que le déterminant de A est un polynôme symétrique par rapport aux variables x_1,x_2,x_3,x_4. Calculer le déterminant de A lorsque x_1,x_2,x_3,x_4, respectivement, des quatre racines du polynôme $f(x)=x^4-x^3-5x^2+1$.

ANALYSE.

Méthode principalepourla solution au problème consiste à transformer le déterminant donné en *la somme des déterminants*, ce quiest plus facile à calculer.

SOLUTIONS.

Nous avons: $$\det A = x_1x_2x_3x_4\begin{vmatrix} x_1+\frac{1}{x_1} & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2+\frac{1}{x_2} & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3+\frac{1}{x_3} & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & x_4+\frac{1}{x_4} \end{vmatrix}$$

$$=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\begin{vmatrix} x_1+\frac{1}{x_1^2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{x_2^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{x_3^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\frac{1}{x_4^2} \end{vmatrix}$$

$$=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2.\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{vmatrix}+\right.$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4^2} \end{vmatrix}\Bigg]$$

$$= x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\left(\frac{1}{x_2^2x_3^2x_4^2}+\frac{1}{x_1^2x_3^2x_4^2}+\frac{1}{x_1^2x_2^2x_4^2}+\frac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2}+\frac{1}{x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2}\right)$$

$$= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+1=\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)+1.$$

Puisqu'il x_1, x_2, x_3, x_4 s'agit d'une solution d'un polynôme $f\left(x\right)=x^4-x^3-5x^2+1$, nous avons: $x_1+x_2+x_3+x_4=1; x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-5$.

Déduire: $\det A = 1-2.\left(-5\right)+1=12.$

- **Problème 20.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2014)

Calcul du déterminant
$$D_{2014}=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & a_{2014} \end{vmatrix}$$

ANALYSE.

Pour calculer le déterminant, nous devons combiner les deux méthodes: *Développer le déterminant en lignes et en colonnes et représenter le déterminant dans la somme des déterminants.*

SOLUTIONS.

Nous avons:

$$D_{2014}=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & a_{2014}-1+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & a_{2014}-1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant le premier déterminant par la dernière colonne, en ajoutant la dernière colonne du deuxième déterminant avec les colonnes qui la précèdent, nous obtenons :

$D_{2014}=(a_{2014}-1)D_{2013}+(a_1+1)...(a_{2013}+1) \quad (1)$

D'autre part:

$$D_{2014}=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014}+1-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{2014}+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant le premier déterminant selon de la dernière ligne, en ajoutant la dernière ligne du deuxième déterminant avec les lignes qui la précèdent, nous obtenons:

$D_{2014}=(a_{2014}+1)D_{2013}-(a_1-1)...(a_{2013}-1) \quad (2)$

De (1) et (2) il résulte que: $D_{2014}=\dfrac{(a_1+1)...(a_{2014}+1)+(a_1-1)...(a_{2014}-1)}{2}$.

3.2. Problèmes de recherche du rang des matrices

- **Problème 1.** Trouver le rang d'une matrice $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, nous utilisons la méthode de *transformation élémentaire*.

SOLUTIONS.

$$A\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{(4)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Changer de colonne.

(2):Ajoutez la première ligne à la seconde, multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à la quatrième ligne.

(3): Ajoutez la deuxième ligne à la troisième ligne.

(4): Multipliez la troisième ligne par (-1), puis ajoutez à la quatrième ligne.

Donc: Si $a\neq 1$ alors $rang\,A=4$, si $a=1$ alors $rang\,A=3$

- **Problème 2**.

Trouver le rang de la matrice $$A=\begin{bmatrix}1+a & a & ... & a\\ a & 1+a & ... & a\\ ... & ... & ... & ...\\ a & a & ... & 1+a\end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes:*Transformation élémentaire et déterminant.*

SOLUTIONS.

$$A\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix}1+na & a & ... & a\\ 1+na & 1+a & ... & a\\ ... & ... & ... & ...\\ 1+na & a & ... & 1+a\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix}1+na & a & ... & a\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Ajouter toutes les colonnes à la première colonne.

(2): Multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à toutes les lignes restantes.

Si $a\neq\frac{-1}{n}$ alors $1+na\neq 0$ et $rang\, A=n.$

Si $a=\frac{-1}{n}$ alors $1+na=0$ et $rang A=n-1$

Parce qu'il y a une sous-détermination d'ordre n-1 qui inclut n-1 la dernière ligne et la dernière colonne:

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 1 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$ et le déterminant est d'ordre n égal à 0.

- **Problème 3.** Trouver le rang d'une matrice d'ordre $n(n\geq 2)$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & ... & 1\\ 1 & 0 & x & ... & x\\ 1 & x & 0 & ... & x\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & x & x & ... & 0\end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode de *transformation élémentaire*.

SOLUTIONS.

Si $x \neq 0$ alors $A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la première colonne par x, multipliez la première ligne par x.

(2): Ajoutez toutes les colonnes restantes à la première colonne.

(3): Multipliez la première ligne par (-1), puis additionnez toutes les colonnes restantes.

Donc: $\quad rang\, A = n$ si $x \neq 0$

Si $x = 0$ alors $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Expliquer:

(4): Multipliez la deuxième ligne par (-1), puis additionnez toutes les lignes restantes.

Donc: $\quad rang\, A = 2$ si $x = 0$

- **Problème 4**.(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2016)

Trouver le rang d'une matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes: *Transformation élémentaire et déterminant.*

SOLUTIONS.

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Ajoutez toutes les colonnes restantes à la première colonne.

(2): Multipliez la première ligne par (-1), puis additionnez toutes les lignes restantes.

Si $a \neq (1-n)b$ et $a \neq b$ alors $rang\, A = n$

Si $a = b \neq 0$ alors $rang\, A = 1$

Si $a = b = 0$ alors $rang\, A = 0$

Si $a = (n-1)b = 0$ alors $rang\, A = n-1$

Parce qu'il y a un sous-décimal n-1 (supprimer la première ligne, la première colonne):

$\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \neq 0$, et le déterminant est d'ordre n égal à 0.

- **Problème 5**.(Extrait des questions d'examen officielles des Olympiades étudiantes de mathématiques, 2019)

Pour $a,b \in \mathbb{R}$, satisfaire $a+b>2$ et matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$

Argument par a,b rang de matrice A.

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes: *Transformation élémentaire et déterminant.*

SOLUTIONS.

En calculant le déterminant de la matrice A on obtient: $\det A = (a-b)^2\left[(a+b)^2 - 4\right]$

Car $a+b>2$ donc $\det A = 0 \Leftrightarrow a = b.$

- Si $a \neq b$ alors $rang A = 4.$
- Si $a = b$ alors effectuez des transformations élémentaires sur la ligne et la colonne de Ala manière suivante:

$$A \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 2+2a & a & 1 & a \\ 2+2a & 1 & a & 1 \\ 2+2a & a & 1 & a \\ 2+2a & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Ajoutez toutes les colonnes restantes à la première colonne.

(2): Multipliez la première colonne par $\frac{1}{2+2a}$.

(3): Multipliez la première ligne par (-1), puis additionnez toutes les lignes restantes.

(4): Supprimez la ligne zéro et la quatrième ligne.

Ainsi: $rangA = 2.$

- **Problème 6.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2016)

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 2, A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = i + j, j = 1, 2, ..., n.$

Retrouver le rang de A.

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, spécifiez d'abord les éléments de la matrice, puis utilisez la *méthode de transformation élémentaire* .

SOLUTIONS.

$$A \overset{(1)}{=} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & ... & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & ... & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & ... & 2n \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & ... & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): À partir de l'hypothèse, le problème peut être déterminé par la matrice A.

(2): Multipliez la ligne i par (-1), puis ajoutez la ligne $i+1$ avec $i = \overline{1, n}.$

(3): Multipliez la ligne i par (-1), puis ajoutez la ligne $i+1$ avec $i = \overline{2, n}.$

Ainsi: $rangA = 2.$

- **Problème 7**. **(**Extrait du concours officiel d'entrée au Master de Mathématiques, 2005)

Trouver le rang d'une matrice carrée d'ordre n:

$$B=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & a \end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes: *Transformation élémentaire et déterminant.*

SOLUTIONS.

$$B\xrightarrow{(1)}\begin{bmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & ... & a \end{bmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{bmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a-1 \end{bmatrix}=C$$

Expliquer:

(1): Ajoutez toutes les colonnes restantes à la première colonne.

(2): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez toutes les lignes restantes.

Nous avons les trois cas suivants :

- Si $a\neq 1-n$ et $a\neq 1$ alors $rangB=rangC=n.$
- Si $a=1$ alors $rangB=rangC=1.$
- Si $a=1-n$ alors $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & -n & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -n \end{bmatrix}$

a sous-déterminateur d'ordre $n-1$ non nul, c'est la sous-détermination créé par $n-1$ la dernière ligne, la dernière $n-1$ colonne:

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} -n & 0 & ... & 0 \\ 0 & -n & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & -n \end{vmatrix}=(-n)^{n-1}\neq 0.$$

Et $\det C=0.$

Donc, $rangC=n-1$ déduire $rangB=n-1.$

3.3. Problèmes impliquant des matrices inverses

- **Problème 1**. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

ANALYSE.

Le problème est résolu par deux méthodes: *Transformation déterminante et élémentaire*.

SOLUTIONS.

Résolution 1. Utilisation de la méthode des déterminants:

Nous avons: $\det A = 2 + 12 - 9 - 2 = 3$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ainsi: $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Résolution 2. Utilisation de la méthode de transformation élémentaire:

Considérez la matrice $A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Expliquer

(1): Multipliez la première ligne par (-2), puis ajoutez à la deuxième ligne, multipliez la première ligne par (-3) et ajoutez à la troisième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (-2), puis ajoutez à la troisième ligne.

(3): Multipliez la troisième ligne par $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ainsi: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- **Problème 2.** (Extrait de la question d'examen proposée pour l'Olympiade étudiante de mathématiques, 2016)

Pour les matrices carrées d'ordre $n = 2016$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2015 & 2016 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2014 & 2015 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2013 & 2014 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Trouver $X_{n\times n}$ à $A \times X = B.$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, il faut d'abord trouver A^{-1}, que l'on peut utiliser deux méthodes: *le système d'équations et la transformation élémentaire*.

SOLUTIONS.

Résolution 1. Utilisation de la méthode du système d'équations:

Considérons le système d'équations: $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 \\ x_2 + \dots + x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Ainsi: $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Résolution 2. Utilisation de la méthode de transformation élémentaire:

$$\left[A\middle|I_n\right]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}1&1&1&...&1&1&1&0&0&...&0&0\\0&1&1&...&1&1&0&1&0&...&0&0\\0&0&1&...&1&1&0&0&1&...&0&0\\...&...&...&...&...&...&...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&1&0&0&0&...&1&0\\0&0&0&...&0&1&0&0&0&...&0&1\end{array}\right]$$

Multipliez la ligne $(i+1)$ par (-1), puis ajoutez à la ligne i avec $i=\overline{1,n-1}$, on obtient:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}1&0&0&...&0&0&1&-1&0&...&0&0\\0&1&0&...&0&0&0&1&-1&...&0&0\\0&0&1&...&0&0&0&0&1&...&0&0\\...&...&...&...&...&...&...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&0&0&0&0&...&1&-1\\0&0&0&...&0&1&0&0&0&...&0&1\end{array}\right]=\left[I_n\middle|A^{-1}\right]$$

Donc: $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&...&0&0\\0&1&-1&...&0&0\\0&0&1&...&0&0\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&-1\\0&0&0&...&0&1\end{bmatrix}$$

Ainsi: $$X=A^{-1}\times B=\begin{bmatrix}1&-1&0&...&0&0\\0&1&-1&...&0&0\\0&0&1&...&0&0\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&-1\\0&0&0&...&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&3&...&2015&2016\\0&1&2&...&2014&2015\\0&0&1&...&2013&2014\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&...&1&2\\0&0&0&...&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&...&1&1\\0&1&1&...&1&1\\0&0&1&...&1&1\\...&...&...&...&...&...\\0&0&0&....&1&1\\0&0&0&...&0&1\end{bmatrix}$$

- **Problème 3**. Trouver l'inverse de la matrice $A=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{bmatrix}$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la *méthode du système d'équations*.

SOLUTIONS.

Considérons le système d'équations: $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = y_1 & (1) \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + \dots + x_n = y_2 & (2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + (1+a)x_n = y_n & (n) \end{cases}$

En additionnant chaque côté de (1), (2), ...(n) on obtient:

$(n+a)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$

- Si $a=-n$, on peut choisir le paramètre $y_1, y_2, \dots, y_n$ satisfaisant $y_1 + y_2 + \dots + y_n \neq 0$. Alors, le système d'équations n'a pas de solution et donc la matrice A n'est pas inversible.

- Si $a \neq -n$ alors nous avons: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{n+a}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (*)$

Prenez l'équation (1) moins (*): $ax_1 = \frac{1}{n+a}\left((n+a-1)y_1 - y_2 - \dots - y_n\right)$

+ Si $a=0$ alors nous pouvons choisir le paramètre de $y_1, y_2, \dots, y_n$ sorte que l'équation ci-dessus n'ait pas de solution. Par conséquent, le système d'équations n'a pas de solution et la matrice A n'est pas inversible.

Si $a \neq 0$ alors nous avons: $x_1 = \frac{1}{a(n+a)}\left((n+a-1)y_1 - y_2 - \dots - y_n\right)$

Prenez (2) moins (*): $x_2 = \frac{1}{a(n+a)}\left(y_1 - (n+a-1)y_2 - y_3 \dots - y_n\right)$

$\vdots$

Prenez (n) moins (*): $x_n = \frac{1}{a(n+a)}\left(y_1 - y_2 - y_3 \dots - (n+a-1)y_n\right)$

Ainsi:

$$A^{-1}=\frac{1}{a(n+a)}\begin{bmatrix} n+a-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -(n+a-1) & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & -(n+a-1) & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -(n+a-1) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

- **Problème 4**.(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

Soient $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ deux matrices carrées d'ordre n satisfaisant: $AB^2+A=2AB+I_n$

$a)$ Prouver $AB=BA.$

$b)$ Soit $a_{ij,}b_{ij}$ des entiers pour tous $i,j\in\{1,2,3,...,\text{n}\}$. Déterminer le déterminant de la matrice $A.$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, nous devons utiliser nos connaissances des matrices inverses et la méthode:*Représentent le déterminant du produit des déterminants*.

SOLUTIONS.

$a)$ Nous avons: $I_n=AB^2-2AB+A=A(B^2-2B+I_n).$

Donc, A est la matrice inverse et $A^{-1}=B^2-2B+I_n$ déduire:

$A^{-1}.B=(B^2-2B+I_n).B=B^3-2B^2+B$ et $B.A^{-1}=B.(B^2-2B+I_n)=B^3-2B^2+B.$

Déduire, $A^{-1}.B=B.A^{-1}$ donc: $BA=AB.$

$b)$ Nous avons: $A.(B-I_n)^2=I_n$ déduire: $\det A.\det(B-I_n)^2=1$

Puisque $\det A,\det(B-I_n)^2$ est un entier et $\det(B-I_n)^2=(\det(B-I_n))^2\geq 0.$

Ainsi: $\det A=1.$

- **Problème 5**.(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

$a)$ Soit $a,b,\text{c}\in\mathbb{R}$. Calcul du déterminant de la matrice A suivante:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$$

$b)$ Trouver la condition a,b,c pour que la matrice A ait un rang de 3. Pour de tels nombres a,b,c, trouver la matrice inverse $A^{-1}.$

ANALYSE.

Résolvez le problème en combinant plusieurs méthodes: *Calculez le déterminant par développer en lignes, trouvez le rang de la matrice en utilisant la méthode du déterminant, trouvez la matrice inverse en utilisant le déterminant.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

$a)$ En développant le déterminant sur la première ligne, nous obtenons:

$\det A = -2abc.$

$b)$ Une matrice de A d'ordre 3 a un rang de 3 si et seulement si $abc \neq 0.$

En utilisant la formule: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons le résultat suivant:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2c} & \frac{-b}{2ac} \\ \frac{1}{2b} & \frac{-a}{2bc} & \frac{1}{2c} \\ \frac{-c}{2ab} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a} \end{bmatrix}.$$

- **Problème 6**.(Extrait des questions d'examen officielles des Olympiades étudiantes de mathématiques, 2016)

Soit a, b des nombres réels et $$A = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & -a & b \\ b & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

$a)$ Calcul du déterminant de la matrice $A.$

$b)$ Calculer $A^{-1}.$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant plusieurs méthodes: *Calculer le déterminant par développer en lignes, trouver la matrice inverse à l'aide du déterminant.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

$a)$ $\det A = a^4 - b^4.$

$b)$ En utilisant la formule: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons le résultat:

$$A^{-1} = \left(b^4 - a^4\right)^{-1} \begin{bmatrix} a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 \\ b^3 & a^3 & a^2b & ab^2 \\ ab^2 & b^3 & a^3 & a^2b \\ a^2b & ab^2 & b^3 & a^3 \end{bmatrix}$$

- **Problème 7**.(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2017)

Trouver l'inverse d'une matrice carrée d'ordre $2n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode du système d'équations.

SOLUTIONS.

Considérons le système d'équations:
$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2n} = y_1 & (1) \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2n} = y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + 0x_3 + x_4 + \dots + x_{2n} = y_3 & (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 + \dots + x_{2n} = y_4 & (4) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - \dots + 0x_{2n} = y_{2n} & (2n) \end{cases}$$

Prenez $(1)+(2)-(3)+(4)-\dots+(2n)$, nous obtenons:

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2n} = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - \dots + y_{2n} \quad (*)$$

Prenez $(1)-(*), (2n)+(*), (*)-(i), i = 2,3,\dots,2n-1,$ nous obtenons:

$$\begin{cases} x_1 = 0y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \dots - y_{2n} \\ x_2 = y_1 + 0y_2 - y_3 + y_4 - \dots + y_{2n} \\ x_3 = y_1 + y_2 + 0y_3 - y_4 + \dots - y_{2n} \\ x_4 = y_1 - y_2 + y_3 + 0y_4 - \dots + y_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2n} = y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + \dots - y_{2n-1} + 0y_{2n} \end{cases}$$

La matrice inverse à trouver est: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

3.4. Problèmes liés aux systèmes d'équations linéaires

- **Problème 1.** Résoudre et argumenter un système d'équations:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m+1 \end{cases}$$

ANALYSE.

Puisque le système d'équations donné a autant d'équations que d'inconnues, nous pouvons le résoudre par la méthode des déterminants. Cependant, selon cette méthode, nous devons calculer 5 déterminants d'ordre 4, ce qui est évidemment compliqué. Par conséquent, nous utilisons *la méthode de transformation élémentaire* comme suit:

SOLUTIONS.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & -3m+21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

Expliquer:

(1): En échangement la première ligne et la deuxième ligne.

(2): Multipliez la première ligne par (-2), puis ajoutez à la deuxième ligne, multipliez la première ligne par (-1) puis ajoutez à la troisième ligne, multipliez la première ligne par (-4), puis ajoutez la quatrième la ligne.

(3): Multipliez la deuxième ligne par (2), puis ajoutez à la troisième ligne, en échangeant les deuxième et troisième lignes.

(4): Multipliez la deuxième ligne par (-3), puis ajoutez à la troisième ligne.

- Si $m \neq 7$ alors le système d'équations n'a pas de solution
- Si $m = 7$ alors le système d'équations est équivalent à:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1^* & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6^* & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre x_4. Nous avons:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{7}{3}x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 7x_4 + 1 = 1 \\ x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = \dfrac{-5}{3}x_4 \end{cases}$$

Donc, dans ce cas, la solution du système d'équations est:

$$\begin{cases} x_1 = -5a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 7a \\ x_4 = 3a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

- **Problème 2.** (Examen officiel pour le Master de Mathématiques, 2007)

Résoudre et argumenter un système d'équations: $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant *la méthode de transformation élémentaire.*

SOLUTIONS.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right] (*)$$

Expliquer:

(1): Échangez les première et troisième lignes.

(2): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez la deuxième ligne, multipliez la première ligne par $(-m)$ et ajoutez à la troisième ligne.

(3): Ajoutez la deuxième ligne à la troisième ligne.

Nous avons: $2-m-m^2=(1-m)(2+m)$, il y a 3 possibilités:

- Si $m=1$ alors le système d'équations devient: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$rangA = rang\overline{A} = 1$, dans ce cas le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de trois paramètres x_2, x_3, x_4.

La solution du système d'équations est: $\begin{cases} x_1 = 1-a-b-c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

- Si $m=-2$ alors le système d'équations devient: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3^* & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 3 \end{array}\right]$

- Nous avons: $rangA = rang\overline{A} = 3$ déduire un système d'équations avec une infinité de solutions qui dépendent du paramètre x_3. Nous avons: $\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = x_3 \end{cases}$

Dans ce cas, la solution du système d'équations est: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \\ x_4 = 1 \end{cases} (a \in \mathbb{R})$

- Si $m \neq 1$et $m \neq -2$ alors de (*) on a: le système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent des paramètres x_4 et m. Nous avons:

$$(2-m-m^2)x_3 = (1-m) - (1-m)x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{1-x_4}{m+2}$$

$$(m-1)x_2 = (m-1)x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$x_1 = 1 - x_2 - mx_3 - x_4 = \frac{1-x_4}{m+2}$$

Donc, dans ce cas le système d'équations admet une solution: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_2 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_3 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_4 = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$

- **Problème 3.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2017)

Sachant a_{ij} que ce sont des nombres entiers, résolvez le système d'équations:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ \dfrac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant *la méthode des déterminants*.

SOLUTIONS.

Le système d'équations donné est équivalent à:

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)x_1 + 2a_{12}x_2 + ... + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)x_2 + ... + 2a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + ... + (2a_{nn}-1)x_n = 0 \end{cases}$$

En appelant A_n la matrice des coefficients du système d'équations ci-dessus, on a:

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & ... & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & ... & 2a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & ... & 2a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

Nous avons: a_{ij} sont des entiers, donc les compléments algébriques de $(A_n)_{ij}$ sont aussi des entiers, donc si nous développons le déterminant selon de la dernière ligne, nous aurons:

$$\det A_n = 2k + (2a_{nn}-1)\begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & ... & 2a_{1,n-1} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & ... & 2a_{2,n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 2a_{n-1,1} & 2a_{n-1,2} & ... & 2a_{n-1,n-1}-1 \end{vmatrix}$$

$$= 2k + (2a_{nn} - 1)\det A_{n-1}$$
$$= 2k + 2a_{nn}\det A_{n-1} - \det A_{n-1}$$
$$= 2l - \det A_{n-1}$$

Par conséquent, $\det A_n + \det A_{n-1} = 2l$ étant pair, déduire $\det A_n$ et $\det A_{n-1}$ a la même parité, mais $\det A_1 = 2a_{11} - 1$ être impair, déduire $\det A_n$ être impair, donc $\det A_n \neq 0$ (puisque 0 est pair). Puisque le système d'équations existe $\det A_n \neq 0$, le système d'équations ci-dessus est un système de Cramer et a une solution unique de $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

- **Problème 4.**

Résolvez le système d'équations: $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ cx_2 + ax_3 = b \\ cx_1 + bx_3 = a \end{cases}$ où a, b, c sont trois nombres non nuls.

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant *la méthode des déterminants***.**

SOLUTIONS.

On a: $$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

Le système d'équations est donc le système de Cramer. De plus:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & c & a \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2 + c^2\right)b\ ;\ \det A_2 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)a\ ;$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 + b^2 - c^2\right)c$$

Le système d'équations a donc une unique solution:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc};\ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

- **Problème 5.**

Résoudre et argumenter le système d'équations selon les paramètres m:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2 \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases}$$

ANALYSE.

Pour le problème du calcul du seul déterminant d'ordre 3,possible en utilisant *la méthode des déterminants.*

SOLUTIONS.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3) \text{ ;}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = 4(3-m) \text{ ; } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(m-3)$$

- Si $m \neq 1$ et $m \neq 3$ alors le système d'équations à solution unique est:

$x_1 = \dfrac{4}{1-m}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \dfrac{2}{m-1}$

Si $m = 1$ alors D = 0, $D_1 = 8 \neq 0$, alors le système d'équations n'a pas de solution.

Si $m = 3$ alors $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, pas encore de conclusion.

En substituant $m = 3$ dans le système d'équations donné, on obtient:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} .$$

Ce système d'équations a une infinité de solutions dépendantes x_2.

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 2 \\ x_3 = 1 - \dfrac{5}{2} x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

- **Problème 6.**(Extrait des questions d'examen officielles des Olympiades étudiantes de mathématiques, 2017)

Résoudre et argumenter le système d'équations suivant selon le paramètre m:

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2 + m \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = 2 + m \end{cases}$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant *la méthode de transformation élémentaire.*

SOLUTIONS.

Créer une matrice augmentée:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & 2+m \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ m+2 & 0 & 3-m & m+2 \\ m+2 & 0 & 3+m-m^2 & (m+1)(m+2) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ m+2 & 0 & 3-m & m+2 \\ 0 & 0 & m(2-m) & m(m+2) \end{array}\right] \quad (*)$$

Expliquer:

(1): Ajoutez la première ligne à la deuxième ligne. Multipliez la première ligne par m puis ajoutez à la troisième ligne.

(2): Multipliez la deuxième ligne par (-1), puis ajoutez à la troisième ligne.

De (*), nous avons:

- Si $m=0$ alors le système d'équations a une infinité de solutions: $\begin{cases} x=\dfrac{-3}{z}+1 \\ y=\dfrac{1}{2}z+1 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$

Si $m=2$ alors le système d'équations n'a pas de solution.

- Si $m=-2$ alors le système d'équations a une infinité de solutions: $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-x \\ z=0 \end{cases}$

- Si $m\neq 0, m\neq 2$ et $m\neq -2$ alors le système d'équations n'a qu'une solution: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{m-2} \\ y=\dfrac{m+3}{2-m} \\ z=\dfrac{m+2}{2-m} \end{cases}$

- **Problème 7.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2019)

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée réelle d'ordre n, définie par: Si $i=j$ alors $a_{ij}=5$, si $i=j+1$ alors $a_{ij}=2$, si $i=j-1$ alors $a_{ij}=3$, si $i\notin\{j, j+1, j-1\}$ alors $a_{ij}=0$.

$a)$ Calcul du déterminant de la matrice A d'ordre n.

$b)$ Résolvez le système d'équations: $$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, on peut combiner des méthodes: *Calculer le déterminant par la méthode d'induction, résoudre le système d'équations par la méthode du déterminant.*

SOLUTIONS.

$a)$ Nous avons: $$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Mettre: $D_n = \det A$

En développant le déterminant selon la première ligne, nous avons:

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant selon la première colonne, nous avons la formule de récurrence:

$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \, (*) \quad (n \geq 3)$

À partir de (*) nous avons: $D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

Comme la formule est vraie pour tout $n \geq 3$, on a :

$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \dots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$

En calculant directement, nous avons: $D_2 = 19, D_1 = 5,\ D_2 - 2D_1 = 9.$

Ainsi: $D_n - 2D_{n-1} = 3^n \,(1)$

D'autre part, également à partir de la formule (*), nous avons: $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$

Comme ci-dessus, nous avons:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2\left(D_{n-1} - 3D_{n-2}\right) = 2^2\left(D_{n-2} - 3D_{n-3}\right) = ... = 2^{n-2}\left(D_2 - 3D_1\right) = 2^n$$

Ainsi: $$D_n - 3D_{n-1} = 2^n \quad (2)$$

De (1) et (2) nous avons: $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

$b)$ Car $D_n = \det A \neq 0$, déduire le système d'équations donné est un système de Cramer, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule solution. Nous voyons qu'en $x = (1,1,...,1)$ tant que solution, c'est la seule solution du système d'équations donné.

- **Problème 8.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2019)

Soit $3n$ entier: $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n; c_1, c_2, ..., c_n$, Satisfaisant $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = 0.$ Prouver que le système d'équations suivant a toujours une solution entière:

$$\begin{cases} a_1b_1x_1 + a_1b_2x_2 + ... + a_1b_nx_n = c_1 - x_1 \\ a_2b_1x_1 + a_2b_2x_2 + ... + a_2b_nx_n = c_2 - x_2 \\ .... \\ a_nb_1x_1 + a_nb_2x_2 + ... + a_nb_nx_n = c_n - x_n \end{cases}$$

ANALYSE.

Pour résoudre le problème, il faut combiner les méthodes: *Calcul du déterminant par induction, transformation élémentaire, résolution du système d'équations par la méthode du déterminant.*

SOLUTIONS.

Calcul du déterminant $$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

Séparer le déterminant par colonne n, nous avons:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & ... & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & ... & a_2b_{n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}b_1 & ... & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & ... & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & ... & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & ... & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}b_1 & ... & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & ... & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & ... & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & ... & a_2b_{n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}b_1 & ... & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & ... & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & ... & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & ... & a_2b_{n-1} & a_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n-1}b_1 & ... & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & ... & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

En développant le premier déterminant par la colonne (n) nous obtenons le déterminant D_{n-1}. Multipliez la colonne (n) du second déterminant par $(-b_i)$ puis ajoutez à la colonne $i\left(i=1,2,...,n-1\right)$, nous obtenons:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Et nous avons la formule récursive: $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Comme la formule est vraie pour tout n, on a: $D_n = D_{n-1} + a_n b_n = \left(D_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1}\right) + a_n b_n = ... = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n$

Car: $D_1 = a_1 b_1 + 1$ à la fin nous avons: $D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = 1.$ Donc, le système d'équations donné est un système de Cramer. Le système d'équations a donc une solution unique. D_n^i est le déterminant obtenu à partir du déterminant D_n en remplaçant la colonne i par la colonne des coefficients libres. Nous avons des D_n^i nombres entiers pour tous $i = \overline{1,n}$, donc le système donné n'a qu'une solution entière $x_i = \dfrac{D_n^i}{D_n}$.

- **Problème 9.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2018)

Soient a_i $\left(i=1,2,3,4\right)$ des nombres réels et $0 < a_i < 1.$ Résolvons le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + a_2 x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + a_3 x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + a_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant *la méthode des déterminants*.

SOLUTIONS.

Appelé D le déterminant de la matrice de coefficients du système d'équations donné. Nous avons:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Prenez les lignes $i\left(i=1,2,3,4\right)$ moins la première ligne, puis mettez les facteurs communs $\left(1-a_i\right)$ de la colonne $i\left(i=1,2,3,4\right)$, nous avons:

$$D=\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_i\right)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{1-a_1} & \dfrac{1}{1-a_2} & \dfrac{1}{1-a_3} & \dfrac{1}{1-a_4} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ajoutez toutes les colonnes à la première colonne pour obtenir:

$$D=\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_i\right)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{1-a_1}+\displaystyle\sum_{i=2}^{4}\dfrac{1}{1-a_i} & \dfrac{1}{1-a_2} & \dfrac{1}{1-a_3} & \dfrac{1}{1-a_4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-\prod_{i=1}^{4}\left(1-a_i\right)\left(\frac{a_1}{1-a_1}+\sum_{i=2}^{4}\frac{1}{1-a_i}\right)<0.$$

Ainsi, le système d'équations donné n'a qu'une solution triviale.

- **Problème 10.** (Extrait des questions d'examen officielles des Olympiades étudiantes de mathématiques, 2002)

Pour le système d'équations:
$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+...+bx_{2001}+bx_{2002}=1 \\ bx_1+ax_2+bx_3+...+bx_{2001}+bx_{2002}=1 \\ .... \\ bx_1+bx_2+bx_3+...+ax_{2001}+bx_{2002}=2001 \\ bx_1+bx_2+bx_3+...+bx_{2001}+bx_{2002}=2002 \end{cases}$$

Trouver la condition a,b pour que le système d'équations donné ait une solution unique.

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant *la méthode des déterminants*.

SOLUTIONS.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & ... & b & b \\ b & a & ... & b & b \\ ... & ... & \ddots & ... & ... \\ b & b & ... & a & b \\ b & b & ... & b & a \end{vmatrix}_{2002\times2002} \overset{(1)}{=}\left(a+2001b\right)\begin{vmatrix} 1 & b & ... & b & b \\ 1 & a & ... & b & b \\ ... & ... & \ddots & ... & ... \\ 1 & b & ... & a & b \\ 1 & b & ... & b & a \end{vmatrix}_{2002\times2002} \overset{(2)}{=}\left(a+2001b\right)\left(a-b\right)^{2001}.$$

Explication:

(1): Additionnez toutes les colonnes avec la première colonne.

(2): Multipliez la première ligne par (-1), puis ajoutez aux lignes restantes.

Ainsi, le système d'équations donné a une solution unique si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -2001b$.

- **Problème 11. (**Extrait des questions d'examen officielles des Olympiades étudiantes de mathématiques, 2006)

Déterminer n de sorte que le système d'équations suivant ait 3 solutions linéairement indépendantes:

$$\begin{cases} 1^2 x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + n^2 x_n = 0 \\ 2^2 x_1 + 3^2 x_2 + \ldots + (n+1)^2 x_n = 0 \\ 3^2 x_1 + 4^2 x_2 + \ldots + (n+2)^2 x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^2 x_1 + (n+1)^2 x_2 + \ldots + (2n-1)^2 x_n = 0 \end{cases}$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode de *transformation élémentaire*.

SOLUTIONS.

Transformez la matrice des coefficients du système l'équation:

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & \ldots & (n+2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \ldots & (2n-1)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ 3 & 5 & \ldots & 2n+1 \\ 5 & 7 & \ldots & 2n+3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & 2n+1 & \ldots & 4n-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ 3 & 5 & \ldots & 2n+1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \ldots & 2 \end{bmatrix}$$

Expliquer:

(1): Multipliez la ligne k par (-1), puis ajoutez à la ligne $k+1\ (k=1,2,\ldots,n-1)$.

(2): Multipliez la ligne k par (-1), puis ajoutez-la à la ligne $k+1\ (k=2,\ldots,n-1)$.

Donc, le système d'équations a 3 solutions linéairement indépendantes, alors $n \geq 3$.

3.5. Problèmes liés à l'espace vectoriel

- **Problème 1.**

En considérant l'indépendance linéaire, la dépendance linéaire, trouvez le rang et le sous-système linéairement indépendant maximal du système vectoriel suivant:

$$\alpha_1 = (1,0,-1,0),\ \alpha_2 = (1,2,1,1), \alpha_3 = (3,2,3,2),\ \alpha_4 = (1,1,2,1).$$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant des méthodes: *Prouver si un système vectoriel est linéairement indépendant ou linéairement dépendant. Trouvez le rang et le sous-système linéairement indépendant maximal du système vectoriel.*

SOLUTIONS.

Construisez la matrice correspondante A et trouvez le rang de la matrice A:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\1&2&1&1\\3&2&3&2\\1&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&2&2&1\\0&2&6&2\\0&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&1\\0&2&2&1\\0&2&6&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&1\\0&0&-4&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Donc, $rangA=3$ inférieur au nombre de vecteurs, donc le système de vecteurs est linéairement dépendant. Puisque les trois lignes non nulles de la matrice correspondent aux vecteurs $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_2$, le sous-système maximum linéairement indépendant de $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ est $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_2$ et $rang\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3.$

- **Problème 2.**

Soit le système vectoriel linéairement $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ indépendant dans l'espace vectoriel V. Prouver: $a)$ Système vectoriel $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,...,\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ est également linéairement indépendant.

$b)$ Système vectoriel:

$$\begin{aligned}&\gamma_1=a_{11}\alpha_1+...+a_{1m}\alpha_m\\&\gamma_2=a_{21}\alpha_1+...+a_{2m}\alpha_m\\&..............................\\&\gamma_m=a_{m1}\alpha_1+...+a_{mm}\alpha_m\end{aligned}$$

Indépendance linéaire si et seulement si $\det A\neq 0$, où $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&...&a_{mm}\end{bmatrix}$

ANALYSE.

Résoudre le problème à l'aide de la méthode: *Démontrer qu'un système vectoriel est linéairement indépendant.*

SOLUTIONS.

Supposer: $b_1\beta_1+b_2\beta_2+...+b_m\beta_m=0 \quad (b_i\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow b_1\alpha_1+b_2(\alpha_1+\alpha_2)+...+b_m(\alpha_1+...+\alpha_m)=0$

$\Leftrightarrow (b_1 + ... + b_m)\alpha_1 + (b_2 + ... + b_m)\alpha_2 + ... + b_m\alpha_m = 0$

Comme $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ il est linéairement indépendant, on a:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + ... + b_{m-1} + b_m = 0 \\ \quad b_2 + ... + b_{m-1} + b_m = 0 \\ .... \\ \qquad b_{m-1} + b_m = 0 \\ \qquad\qquad b_m = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

De (*) nous avons: $b_m = b_{m-1} = ... = b_1 = 0.$ Donc, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ linéairement indépendant

$b)$ Supposer: $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + ... + c_m\gamma_m = 0 \quad (c_j \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow (a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + ... + a_{m1}c_m)\alpha_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{m2}c_m)\alpha_2$
$+ ... + (a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + ... + a_{mm}c_m)\alpha_m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + ... + a_{m1}c_m = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{m2}c_m = 0 \\ .... \\ a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + ... + a_{mm}c_m = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Le système vectoriel est linéairement $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ indépendant si et seulement si le système d'équations (*) a une solution unique $(0, 0, ..., 0)$ si et seulement si la matrice des coefficients du système d'équations (*) a detA est non nul.

- **Problème 3.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2014)

Considérons V un espace de fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$ et supposons $f_1, f_2, ..., f_n \in V$ que $\det\left(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx\right) = 0.$ Prouver que le système vectoriel $f_1, f_2, ..., f_n$ dépend linéairement de V.

ANALYSE.

Résoudre le problème à l'aide de la méthode: *Démontrer qu'un système vectoriel est linéairement dépendant.*

SOLUTIONS.

Mettre: $A = \left(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx\right)$. Car $\det A = 0$, déduire système des vecteurs lignes de A dépendance linéaire, déduire existence $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ non simultanée est nulle telle que pour tout $j = 1, 2, ..., n$ on a:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\int_a^b f_i(x)\,f_j(x)\,dx\right)=0$$

D'autre part: $$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\,f_j(x)\right) \quad (*)$$

En intégrant les deux membres de (*), on obtient:

$$\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right]^2 dx=0$$

Donc: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=0$, déduire le système de vecteurs $f_1, f_2,..., f_n$ est linéairement dépendant.

- **Problème 4.** Dans $\mathbb{R}^4$ le système vectoriel:

$$u_1=(1,1,1,1),u_2=(2,3,-1,0),u_3=(-1,-1,1,1)$$

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le vecteur $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ soit une combinaison linéaire du système vectoriel u_1,u_2,u_3.

ANALYSE.

Résoudre le problème à l'aide de la méthode*: Démontrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système vectoriel donné.*

SOLUTIONS.

vecteur $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ est une combinaison linéaire d'un système vectoriel u_1,u_2,u_3 si et seulement si l'équation $u=y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$ a une solution si et seulement si le système d'équations suivant a une solution:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&x_1\\1&3&-1&x_2\\1&-1&1&x_3\\1&0&1&x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&x_1\\0&1&0&-x_1+x_2\\0&-3&2&-x_1+x_3\\0&-2&2&-x_1+x_4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&x_1\\0&1&0&-x_1+x_2\\0&0&2&-4x_1+3x_2+x_3\\0&0&2&-3x_1+2x_2+x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&x_1\\0&1&0&-x_1+x_2\\0&0&2&-4x_1+3x_2+x_3\\0&0&0&x_1-x_2-x_3+x_4\end{array}\right]$$

Donc, le système d'équations a une solution si et seulement si $x_1-x_2-x_3+x_4=0$. Alors un vecteur $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ est une combinaison linéaire d'un système vectoriel u_1,u_2,u_3 si et seulement si $x_1-x_2-x_3+x_4=0$.

- **Problème 5.**

Dans $\mathbb{R}^3$ pour les systèmes vectoriels:

(α): $\alpha_1 = (1,2,1),\ \alpha_2 = (2,-2,1),\ \alpha_3 = (3,2,2)$

(β): $\beta_1 = (1,1,1),\ \beta_2 = (1,1,0),\ \beta_3 = (1,0,0)$

$a)$ La preuve $(\alpha),(\beta)$ est la base de $\mathbb{R}^3$.

$b)$ Trouvez la matrice de conversion de base de (α) à (β).

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Trouvez la matrice qui convertit d'une base à une autre.*

SOLUTIONS.

$a)$ Faire une matrice A où les lignes de A sont des vecteurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

On a: $\det A = 2 \neq 0$ donc le système vectoriel est linéairement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ indépendant, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est la base de $\mathbb{R}^3$. Similaire $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ est la base de $\mathbb{R}^3$.

$b)$ Résolvez les trois systèmes d'équations suivants:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Système d'équations (1): $a_3 = \frac{-1}{2}, a_2 = -a_3 = \frac{1}{2}, a_1 = 1 - 2a_2 - 3a_3 = \frac{3}{2}$

Système d'équations (2): $b_3 = \frac{5}{2}, \mathrm{b}_2 = 1 - b_3 = \frac{-3}{2}, \mathrm{b}_1 = 1 - 2b_2 - 3b_3 = \frac{-7}{2}$

Système d'équations (3): $c_3 = 2, \mathrm{c}_2 = 1 - c_3 = -1, \mathrm{c}_1 = 1 - 2c_2 - 3c_3 = -3$

Ainsi: $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-7}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

- **Problème 6.**

Dans $\mathbb{R}^2$ pour la base $(\alpha),(\beta),(\gamma)$. Sache que: $T_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}, T_{\gamma\beta}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ et baser

$(\gamma):\gamma_1=(1,1),\quad \gamma_2=(1,0)$. Trouver la base de (α).

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Trouvez la matrice qui convertit d'une base à une autre.*

SOLUTIONS.

Trouvons d'abord la base (β):

Parce que $T_{\gamma\beta}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ déduire: $\beta_1=3\gamma_1+2\gamma_2=(5,3), \beta_2=\gamma_1+\gamma_2=(2,1)$.

Nous avons: $T_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ déduire: $T_{\beta\alpha}=T_{\alpha\beta}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

Ainsi: $\alpha_1=-\beta_1+2\beta_2=(-1,-1), \alpha_2=\beta_1-\beta_2=(3,2)$

Donc: la base de $(\alpha):\alpha_1=(-1,-1),\quad \alpha_2=(3,2)$

- **Problème 7.**

Soient $$V=\left\{\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Sachez que: V avec l'addition de deux matrices et la multiplication d'un nombre par la matrice est un espace vectoriel. Trouver la base, la dimension de V.

ANALYSE.

Résolvez le problème en combinant les méthodes:*Montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système de vecteurs donné. Montrer qu'un système vectoriel est linéairement indépendant.*

SOLUTIONS.

Considérons deux vecteurs dans V: $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Alors, pour tout vecteur $X=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\in V$ on a toujours $X=a.A_1+b.A_2$

Ainsi: $\{A_1,A_2\}$ une génération de V (1)

D’autre part: pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ ce que nous avons:

$$a.A_1 + b.A_2 = 0 \Leftrightarrow a.A_1 + b.A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc, le système vectoriel est linéairement $\{A_1, A_2\}$ indépendant (2)

De (1) et (2) nous avons: $\{A_1, A_2\}$ est la base de V et $\dim V = 2$.

- **Problème 8.**

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs. Dans $\mathbb{R}^+$ nous définissons deux opérations:

$$(a)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x \oplus y = xy$$
$$(b)\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+ : a * x = x^a$$

Sachant cela, $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ est un espace vectoriel. Trouver la base, le nombre de dimensions de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^+$.

ANALYSE.

Résoudre le problème à l'aide de la méthode: *Démontrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'un système vectoriel donné.*

SOLUTIONS.

Pour tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons:

$x \oplus 1 = x.1 = x$, donc le vecteur nul dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^+$ est 1.

Pour chaque vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^+$, α différent le vecteur nul (c'est-à-dire $\alpha \neq 1$) nous prouvons qu'il (α) est un générateur de $\mathbb{R}^+$.

En effet, on a: $x = \alpha^{\log_\alpha x} = (\log_\alpha x) * \alpha = a * \alpha$, dans lequel $a = \log_\alpha x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, x il est toujours possible d'exprimer la linéarité sur un système constitué d'un vecteur $\{\alpha\}$ (1).

D'autre part, puisque α différent le vecteur nul, déduire $\{\alpha\}$ des systèmes de vecteurs linéairement indépendants (2)

De (1) et (2) nous avons: $\dim \mathbb{R}^+ = 1$ et la base de $\mathbb{R}^+$ est un système constitué d'un vecteur $\{\alpha\}$ avec α des nombres réels positifs autres que 1.

- **Problème 9.**

Soit V un espace vectoriel, A est un sous-espace vectoriel de V. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel B de V tel que $A + B = V$ et $A \cap B = \{0\}$.

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes: Trouver la base et le nombre de dimensions des sous-espaces d'intersection et de somme. *Montrer qu'un système vectoriel est linéairement indépendant.*

SOLUTIONS.

Supposons que $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ est une base dans A, alors c'est $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ un système de vecteurs linéairement indépendant dans V, nous pouvons donc ajouter plus de vecteurs, pour obtenir un système de vecteurs

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n$ est la base de V. Mettre $B=\langle\alpha_{k+1},...,\alpha_n\rangle$. Alors:

Parce que $A=\langle\alpha_1,...,\alpha_k\rangle$ déduire $A+B=\langle\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n\rangle=V.$

D'autre part, si $x\in A\cap B$ alors existe des nombres $a_i,b_j\in\mathbb{R}$ tels que:

$x=a_1\alpha_1+...+a_k\alpha_k;\quad x=b_{k+1}\alpha_{k+1}+...+b_n\alpha_n$

Ainsi: $$a_1\alpha_1+...+a_k\alpha_k-b_{k+1}\alpha_{k+1}-...-b_n\alpha_n=0$$

Car le système vectoriel $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ est linéairement indépendant, $a_i=0,b_j=0$, déduire $x=0.$ Donc, $A\cap B=\{0\}$.

- **Problème 10.**

Pour $\mathbb{R}_n[x]$ deux bases:

$(\alpha):\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=x^2,...,\alpha_{n+1}=x^n$

$(\beta):\beta_1=1,\beta_2=x-a,\beta_3=(x-a)^2,...,\beta_{n+1}=(x-a)^n$

où a est une constante.

$a)$ Trouver la matrice de conversion de base de (α) à (β).

$b)$ Trouvez la matrice de conversion de base de (β) à (α).

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Trouvez la matrice qui convertit d'une base à une autre.*

SOLUTIONS.

$a)$ Nous avons: $\beta_{k+1}=(x-a)^k=C_k^0(-a)^k+C_k^1(-a)^{k-1}x+...+C_k^kx^k$

$$=C_k^0(-a)^k\alpha_1+C_k^1(-a)^{k-1}\alpha_2+...+C_k^k\alpha_{k+1}+0\alpha_{k+2}+...+0\alpha_{n+1}$$

En substituant, $k=0,1,...,n$ nous avons:

$$T_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0(-a) & \ldots & C_k^0(-a)^k & \ldots & C_n^0(-a)^n \\ 0 & C_1^1 & \ldots & C_k^1(-a)^{k-1} & \ldots & C_n^1(-a)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & C_n^n \end{bmatrix}$$

b) Nous avons: $\alpha_{k+1}=x^k=\left[(x-a)+a\right]^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}(x-a)+\ldots+C_k^k(x-a)^k$.

$$=C_k^0a^k\beta_1+C_k^1a^{k-1}\beta_2+\ldots+C_k^k\beta_{k+1}+0\beta_{k+2}+\ldots+0\beta_{n+1}$$

En substituant, $k=0,1,\ldots,n$ nous avons:

$$T_{\beta\alpha}=\begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0a & \ldots & C_k^0a^k & \ldots & C_n^0a^n \\ 0 & C_1^1 & \ldots & C_k^1a^{k-1} & \ldots & C_n^1a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & C_n^n \end{bmatrix}$$

- **Problème 11.**

Dans $\mathbb{R}^4$ pour les vecteurs:

$u_1=(1,1,0,0), u_2=(1,1,1,1), u_3=(0,-1,0,1), u_4=(1,2,-1,-2)$ et $E=\langle u_1,u_2,u_3,u_4\rangle$.

$a)$ Trouver la base et la dimension de E.

$b)$ Trouver une condition nécessaire et suffisante pour le vecteur $x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in E$.

$c)$ Cho $v_1=(1,a^3,a,1), v_2=(1,b,b^3,1), v_3=(ab+1,ab,0,1)$. Trouver a,b pour v_1,v_2,v_3 être la base de E.

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant les méthodes: *Trouver la base et le nombre de dimensions du sous-espace généré par le système vectoriel. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur appartienne à un sous-espace généré par un système vectoriel. Montrer qu'un système vectoriel est linéairement indépendant.*

SOLUTIONS.

$a)$ Matrice de transformation:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&-1&0&1\\1&2&-1&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&1\\0&1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}$$

La dernière matrice en échelle d'ordre 3 et les 3 autres lignes non nul correspondent aux vecteur u_1,u_2,u_3.

Donc, $\dim E=3$ et la base de E est le système u_1,u_2,u_3 et $E=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$.

$b)$ $x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in E$ si et seulement si l'équation vectorielle $x=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ a une solution. L'équation vectorielle ci-dessus est équivalente au système d'équations suivant:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a_1\\1&1&-1&a_2\\0&1&0&a_3\\0&1&1&a_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a_1\\0&0&-1&-a_1+a_2\\0&1&0&a_3\\0&1&1&a_4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a_1\\0&1&0&a_3\\0&0&-1&-a_1+a_2\\0&1&1&a_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a_1\\0&1&0&a_3\\0&0&-1&-a_1+a_2\\0&0&1&-a_3+a_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a_1\\0&1&0&a_3\\0&0&-1&-a_1+a_2\\0&0&0&-a_1+a_2-a_3+a_4\end{array}\right]$$

Ainsi, le système d'équations a une solution si et seulement si $-a_1+a_2-a_3+a_4=0$

Donc: $$x=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in E\Leftrightarrow a_1+a_3=a_2+a_4$$

$c)$ Puisque $\dim E=3,$ déduire $\{v_1,v_2,v_3\}$ être la base de E si et seulement si $v_1,v_2,v_3\in E$ et $\{v_1,v_2,v_3\}$ sont linéairement indépendants. À la suite de la phrase $b)$, nous avons:

$$v_1\in E\Leftrightarrow 1+a=a^3+1\Leftrightarrow a\in\{0,1,-1\}$$

$$v_2\in E\Leftrightarrow 1+b=b^3+1\Leftrightarrow b\in\{0,1,-1\}\ .$$

Considérez les cas suivants:

- Si $a=0$ ou $b=0$ alors $v_1=v_3$ ou $v_2=v_3$ le système $\{v_1,v_2,v_3\}$ est linéairement dépendant donc ce n'est pas une base de E.
- Si $a=b=1$ alors $v_1=v_2$, donc le système $\{v_1,v_2,v_3\}$ n'est pas une base de E.

- Si $a=1, b=-1$ ou $a=-1, b=1$. L'examen direct montre que le système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant, donc la base de E.

- **Problème 12.**

Dans $\mathbb{R}^4$ pour les espaces sous-vectoriels:

$$U=\langle(2,0,1,1),(1,1,1,1),(0,-2,-1,-1)\rangle$$

$$V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\left|\begin{array}{l}x_1-x_3-x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{array}\right.\right\}$$

$a)$ Trouver la base, le nombre de dimensions des espaces sous-vectoriels $U, V, U+V$.

$b)$ Trouver la base, le nombre de dimensions de l'espace sous-vectoriel $U\cap V$.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Trouvez la base et le nombre de dimensions des sous-espaces d'intersection et de somme.*

SOLUTIONS.

$a)$ On a: les bases de U sont des vecteurs:

$\alpha_1=(2,0,1,1)$, $\alpha_2=(1,1,1,1)$ et donc $U=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$. Le sous-espace V est le sous-espace racine du système d'équations: $\begin{cases}x_1-x_3-x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$. La solution générale est: $\begin{cases}x_1=x_3+x_4\\x_2=x_3-x_4\end{cases}$.

Donc, la solution de base est $\beta_1=(1,1,1,0), \beta_2=(1,-1,0,1)$. Donc, la base de V est β_1,β_2 et $\dim V=2, V=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$. Car $U=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle, V=\langle\beta_1,\beta_2\rangle, U+V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\rangle$ donc le sous-système indépendant au maximum linéaire du système $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$ est la base de $U+V$. Le calcul direct donne le résultat $\dim(U+V)=3$ et $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$ est une base de $U+V$.

$b)$ $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in U$ si et seulement si l'équation vectorielle $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2$ admet une solution, elle est équivalente au système d'équations suivant:

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&x_1\\0&1&x_2\\1&1&x_3\\1&1&x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x_4\\0&1&x_2\\1&1&x_3\\2&1&x_1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x_4\\0&1&x_2\\0&0&-x_4+x_3\\0&-1&x_1-2x_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x_4\\0&1&x_2\\0&0&x_3-x_4\\0&0&x_1+x_2-2x_4\end{array}\right]$$

Alors: $$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in U\Leftrightarrow\begin{cases}x_3-x_4=0\\x_1+x_2-2x_4=0\end{cases}$$

Ainsi: $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\in U\cap V \Leftrightarrow \begin{cases} x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_4=0 \\ x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases} (*)$ Le système de solution fondamental de (*) est un vecteur $\gamma=(2,0,1,1)$, donc $\dim(U\cap V)=1$. La base de $U\cap V$ est le vecteur $\gamma=(2,0,1,1)$.

3.6. Problèmes impliquant la applicationlinéaire, les valeurs propres et les vecteurs propres

- **Problème 1.**

Trouvez la formule d'une application linéaire qui $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ sait:

$$f(1,1,2)=(1,0,0),\ f(2,1,1)=(0,1,1),\ f(2,2,3)=(0,-1,0)$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Déterminer l'expression d'une application linéaire en connaissant l'image d'une base à travers cette application.*

SOLUTIONS.

Supposer: $\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_1(1,1,2)+a_2(2,1,1)+a_3(2,2,3)\ (1)$

Alors: $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,1)+a_3(0,-1,0)=\left(a_1,a_2-a_3,a_2\right)\ (2)$

De (1) déduire: a_1,a_2,a_3 être la solution du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 1 & 3 & x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1+x_2 \\ 0 & -3 & -1 & -2x_1+x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_1-3x_2+x_3 \end{array}\right]$$

Donc: $\begin{cases} a_3=-x_1+3x_2-x_3 \\ a_2=x_1-x_2 \\ a_1=x_1-4x_2+2x_3 \end{cases}$

Ainsi, de (2), nous avons:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1-4x_2+2x_3,2x_1-4x_2+x_3,x_1-x_2\right)$$

- **Problème 2.**

Dans $\mathbb{R}^3$ pour deux bases:

$$(u): u_1=(1,0,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,1)$$

$$(v): v_1=(1,-1,0),\ v_2=(0,1,-1),\ v_3=(1,0,1)$$

Et pour la application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f\left(u_i\right)=v_i$

$a)$ Trouver la formule de f.

$b)$ Trouver des matrices $A_{f/(u)}, \mathrm{A}_{f/(u),(v)}, A_{f/(v)}$

ANALYSE.

Résoudre le problème en combinant des méthodes: *Déterminer l'expression d'une application linéaire en connaissant l'image d'une base à travers cette application. Trouvez la matrice du mappage linéaire dans une paire de bases.*

SOLUTIONS.

$a)$ Trouver la formule de f.

Supposer: $$\left(x_1, x_2, x_3\right) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \quad (1)$$

Alors: $$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = a_1\left(1,-1,0\right) + a_2\left(0,1,-1\right) + a_3\left(1,0,1\right) = \left(a_1 + a_3, -a_1 + a_2, -a_2 + a_3\right) \left(2\right)$$

De (1) déduire: a_1, a_2, a_3 être la solution du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

Donc: $$\begin{cases} a_3 = -x_2 + x_3 \\ a_2 = x_2 \\ a_1 = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

Ainsi, de (2), nous avons: $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1, -x_1 + x_3, -2x_2 + x_3\right)$

$b)$ Trouver des matrices $A_{f/(u)}, \mathrm{A}_{f/(u),(v)}, A_{f/(v)}$

- Matrice $A_{f/(u)}$. Nous avons:

$$\begin{aligned} f\left(u_1\right) &= v_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \quad (1) \\ f\left(u_2\right) &= v_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 \quad (2) \\ f\left(u_3\right) &= v_3 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \quad (3) \end{aligned}$$

Alors: $$A_{f/(u)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

a_i, b_i, c_i sont les solutions des équations vectorielles (1), (2), (3), respectivement. Chaque équation (1), (2), (3) est équivalente à un système d'équations linéaires avec la même matrice de coefficients (uniquement des colonnes libres différentes), on peut donc résoudre 3 systèmes d'équations en même temps suit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

- Système d'équations (1): $a_3 = 1, a_2 = -1, a_1 = 1 - a_3 = 0$
- Système d'équations (2): $b_3 = -2, b_2 = 1, b_1 = -b_3 = 2$
- Système d'équations (3): $c_3 = 1, c_2 = 0, c_1 = 1 - c_3 = 0$

Ainsi: $$A_{f/(u)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice $A_{f/(u),(v)}$. Nous avons:

$$f(u_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$
$$f(u_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$$
$$f(u_3) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

Ainsi: $$A_{f/(u),(v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice $A_{f/(v)}$. Nous avons:

$$f(v_1) = (1,-1,2) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$
$$f(v_2) = (0,-1,-3) = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$
$$f(v_3) = (1,0,1) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$$

a_i, b_i, c_i est la solution des trois systèmes d'équations suivants:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

- Système d'équations (1): $a_3 = 1, a_2 = -a_3 = -1, a_1 = 1 - a_3 = 0$
- Système d'équations (2): $b_3 = -2, b_2 = -1 - b_3 = 1, b_1 = -b_3 = 2$
- Système d'équations (3): $c_3 = 1, c_2 = 0, c_1 = 1 - c_3 = 0$

Ainsi: $$A_{f/(v)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Problème 3.**

Pour la application linéaire:

$$f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$$
$$p(x) \mapsto p'(x)$$

Trouver la matrice de f dans la base:

$$(u) : u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2, \ldots, u_n = x^n$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: *Trouvez la matrice de l'application linéaire dans une paire de bases.*

SOLUTIONS.

Nous avons:

$$f(u_0) = 0 = 0u_0 + 0u_1 + \ldots + 0u_n$$
$$f(u_1) = 1 = 1u_0 + 0u_1 + \ldots + 0u_n$$
$$f(u_2) = 2x = 0u_0 + 2u_1 + \ldots + 0u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(u_k) = kx^{k-1} = 0u_0 + 0u_1 + \ldots + ku_{k-1} + \ldots + 0u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(u_n) = nx^{n-1} = 0u_0 + 0u_1 + \ldots + nu_{n-1} + 0u_n$$

Ainsi:

$$A_{f/(u)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & k & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

- **Problème 4.** (Extrait du concours officiel d'entrée au Master de Mathématiques, 2006)

Trouver des vecteurs propres, des valeurs propres, diagonaliser les matrices suivantes:

$$a)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ANALYSE.

Résolvez le problème en combinant des méthodes:*Trouvez des vecteurs propres, des valeurs propres de la matrice, diagonaliser les matrices.*

SOLUTIONS.

$a)$ Trouver le polynôme caractéristique:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -2\\ 1 & -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda$$

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=0,\lambda=3,\lambda=6.$$

Donc A, a trois valeurs propres $\lambda=0,\lambda=3,\lambda=6.$

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda=0$ sont les solutions non nulles du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & -2 & 0\\ 5 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 9 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre x_3. On a: $x_3=a,x_2=a,x_1=0\ (a\in\mathbb{R}).$ Donc, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda=0$ sont des vecteurs de la forme $(0,a,a),a\neq0,\dim V_0=1.$ La base de V_0 est $\alpha_1=(0,1,1).$

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda=3$ sont les solutions non nulles du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre x_3. Nous avons: $x_3=b,x_2=-b,x_1=2x_2+x_3=-b\ (b\in\mathbb{R}).$ Donc, le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda=3$ est vecteurs de la forme $(-b,-b,b),\mathrm{b}\neq0,\dim V_3=1.$ La base de V_3 est $\alpha_2=(-1,-1,1).$

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda=6$ sont les solutions non nulles du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -4 & -2 & 0\\ 1 & -2 & -4 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Le système d'équations a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre x_3. Nous avons: $x_3 = c, x_2 = -c, x_1 = -x_2 + x_3 = 2c\ (c \in \mathbb{R})$. Donc, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 6$ sont des vecteurs de la forme $(2c, -c, c), c \neq 0, \dim V_6 = 1$. La base de V_6 est $\alpha_3 = (2, -1, 1)$.

- Diagonaliser une matrice: En résumant les 3 cas ci-dessus, nous voyons que la matrice A, a 3 vecteurs propres linéairement indépendants. Donc, A est diagonalisable. La matrice requise T est:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ est une matrice diagonale.}$$

b) Trouver le polynôme caractéristique:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (1-\lambda)^2$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.$$

Donc, A a deux valeurs propres $\lambda = 0, \lambda = 1$.

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 0$ sont les solutions non nulles du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres x_2, x_3. Nous avons: $x_2 = a, x_3 = b, x_4 = 0, x_1 = 0$. Donc, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 0$ sont des vecteurs de la forme $(0, a, b, 0), a^2 + b^2 \neq 0, \dim V_0 = 2$. La base de V_0 de est: $\alpha_1 = (0, 1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 0, 1, 0)$.

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 1$ sont les solutions non nulles du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Système d'équations a une infinité de solutions qui dépendent des paramètres x_4. Nous avons: $x_4 = c, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0 (c \in \mathbb{R})$. Donc, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 1$ sont des vecteurs de la forme $(0,0,0,\mathrm{c}), c \neq 0, \dim V_1 = 1$. La base de V_1 est $\alpha_3 = (0,0,0,1)$.

- Diagonaliser une matrice: En résumant les 2 cas ci-dessus, nous voyons que la matrice A, n'a que 3 vecteurs propres linéairement indépendants tandis que A est une matrice d'ordre 4, donc A ne peut pas être diagonalisée.
- **Problème 5.** (Extrait du concours officiel d'entrée au Master de Mathématiques, 2007)

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la base: $(u): u_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,2,1), u_3 = (1,3,2)$

Et permet la transformation linéaire f définie par:

$$f(u_1) = (0,5,3),\ f(u_2) = (2,4,3),\ f(u_3) = (0,3,2)$$

Trouvez la base pour que la matrice de f dans cette base soit une matrice diagonale.

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant la méthode: *Trouver une base telle que la matrice d'une transformation linéaire dans cette base soit une matrice diagonale.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

Étape 1:Trouver la matrice de f dans la base (u) est: $A_{f/(u)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Étape 2: Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A et de f.

Les résultats récapitulatifs sont les suivants:

- A, a deux valeurs propres $\lambda = -1, \lambda = 2$.
- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = -1$ sont des vecteurs $(-a-b, a, b), a^2 + b^2 \neq 0$. Dans ce cas, A a deux vecteurs propres linéairement indépendants $\alpha_1 = (-1,1,0), \alpha_2 = (-1,0,1)$.
- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 2$ sont des vecteurs $(c, c, 0), \mathrm{c} \neq 0$. Dans ce cas, A a un vecteur propre linéairement indépendant de $\alpha_3 = (1,1,1)$.

À partir de là, nous avons:

- f a deux valeurs propres $\lambda = -1, \lambda = 2.$
- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = -1$ sont des vecteurs de la forme:

$$(-a-b)u_1 + au_2 + bu_3 = (-2a, a+2b, b), a^2 + b^2 \neq 0.$$

Dans ce cas, f il existe deux vecteurs propres linéairement indépendants:

$$\beta_1 = -1.u_1 + 1.u_2 + 0u_3 = (-2,1,0)$$
$$\beta_2 = -1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 = (0,2,1)$$

- Les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda = 2$ sont des vecteurs de la forme:

$$c.u_1 + c.u_2 + c.u_3 = (c, 6c, 4c), \mathrm{c} \neq 0.$$

Dans ce cas, f il existe un vecteur propre linéairement indépendant de:

$\beta_3 = 1.u_1 + 1.u_2 + 1u_3 = (1,6,4).$

Étape 3: Conclusion

Puisqu'il f s'agit d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^3 \left(\dim \mathbb{R}^3 = 3\right)$ et f qu'il existe trois vecteurs propres linéairement indépendants qui sont des vecteurs $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, donc $(\beta): \beta_1, \beta_2, \beta_3$ c'est la base de la $\mathbb{R}^3$ recherche et nous avons: $A_{f/(\beta)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

- **Problème 6.**(Extrait de la question officielle de l'examen de maîtrise en mathématiques, 2006)

Pour une transformation linéaire $f: V \to V$ satisfaire $f^2 = f$. Prouver:

$a)$ $\operatorname{Im} f + \ker f = V$ $b)$ $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant *la définition de* $Kerf, \operatorname{Im} f$.

SOLUTIONS.

$a)$ On a: $\operatorname{Im} f + Kerf \subset V$, il faut prouver: $V \subset \operatorname{Im} f + Kerf$.

Pour tous $\alpha \in V$, nous avons: $\alpha = f(\alpha) + (\alpha - f(\alpha))$

Nous avons: $f(\alpha) \in \operatorname{Im} f$ et $f(\alpha - f(\alpha)) = f(\alpha) - f^2(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) = 0.$

Donc, $(\alpha - f(\alpha)) \in Kerf \Rightarrow \alpha \in \operatorname{Im} f + Kerf$ et $\operatorname{Im} f + Kerf = V.$

$b)$ Supposons: $\beta \in \operatorname{Im} f \cap Kerf$. Alors, il existe $\alpha \in V$ à $f(\alpha) = \beta.$

Parce que $f^2 = f$, donc $\beta = f(\alpha) = f^2(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\beta) = 0$ (car $\beta \in \ker f$)

Donc, si $\beta \in \operatorname{Im} f \cap Kerf$ alors $\beta = 0$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \cap Kerf = \{0\}$.

- **Problème 7.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

Soit le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ être des vecteurs non nuls dans l'espace vectoriel V, avec $\dim V \geq n.$ En supposant $f : V \to V$ une application linéaire dans l'espace vectoriel V telle que $f(\alpha_1) = \alpha_1, f(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha_{i-1},$ pour tout $i = 2, 3, ..., n.$ Preuve d'un système vectoriel linéairement $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ indépendant.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode:*Montrer qu'un système vectoriel est linéairement indépendant.*

SOLUTIONS.

Nous le prouvons par induction.

On a: le système n'a qu'un seul α_1 vecteur linéairement indépendant. Supposons que nous ayons un $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \,(k < n)$ système vectoriel linéairement indépendant. Considérez le système: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_{k+1}\alpha_{k+1} = 0 \quad \left(a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k+1}\right)(1)$

De (1) nous avons: $a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_{k+1} f(\alpha_{k+1}) = 0 \quad (2)$

En soustrayant (2) de (1) on obtient:

$$a_1\left(f(\alpha_1) - \alpha_1\right) + a_2\left(f(\alpha_2) - \alpha_2\right) + ... + a_{k+1}\left(f(\alpha_{k+1}) - \alpha_{k+1}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2 + ... + a_{k+1}\alpha_k = 0$ (Car $f(\alpha_1) = \alpha_1, f(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha_{i-1}$)

$\Rightarrow a_2 = a_3 = ... = a_{k+1} = 0$.

(Parce que le système vectoriel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \,(k < n)$ est linéairement indépendant).

Donc, $a_1 = 0$, le système de vecteurs est linéairement $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+1}$ indépendant pour tout $0 < k < n.$ Ainsi: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ est linéairement indépendante.

- **Problème 8.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

La notation $P_n[x]$ est un espace vectoriel réel composé de polynômes avec des coefficients réels de degré ne dépassant pas n et des polynômes 0. Permet une transformation linéaire $f : P_n[x] \to P_n[x]$ définie par $f(x^k) = 1 + x + x^2 + ... + x^k$, avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$.

$a)$ Trouver la matrice M de f dans la base $(u): u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2, ..., u_n = x^n$ de $P_n[x]$.

$b)$ Trouver une base de $P_n[x]$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice diagonale.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode: Trouvez la matrice de l'application linéaire par rapport à la base. *Trouvez une base telle que la matrice d'une transformation linéaire dans cette base soit une matrice diagonale.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

$a)$ Nous avons: $f\left(x^k\right) = 1 + 1.x + 1.x^2 + ... + 1.x^k$. Donc,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

$b)$ Le polynôme caractéristique d'une matrice M est $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)^n$. Donc, M il n'y a qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$. À partir de laquelle un vecteur propre de la M forme peut être trouvé $(a, 0, 0, ..., 0), a \neq 0.$ Par conséquent, M il n'y a qu'un seul vecteur propre linéairement indépendant, donc f il n'y a pas assez de n vecteurs propres linéairement indépendants, donc il n'y a pas une base de $P_n[x]$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice diagonale.

- **Problème 9.** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2022)

Soit la transformée linéaire $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, définie par $f(P) = (2x+1)P - \left(x^2 - 1\right)P'$, où P' est la dérivée du polynôme P. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f par rapport à la base $(u): u_0 = 1, u_1 = x, u_2 = x^2$.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant une combinaison de méthodes: Trouvez la matrice de la transformation linéaire par rapport à une base. *Trouvez les valeurs propres, les vecteurs propres de la transformation linéaire.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

- On a: Puisque $f(P)=(2x+1)P-(x^2-1)P'$ la matrice de la transformation linéaire

f dans la base $(u): u_0=1, u_1=x, u_2=x^2$ est $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Trouvez les valeurs propres: $\lambda=-1, \lambda=1, \lambda=3.$
- Trouver les vecteurs propres correspondants $\alpha_1=(1,-2,1), \alpha_2=(-1,0,1), \alpha_3=(1,2,1).$

Problème 10. (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2016)

Donner $\square_{n+1}[x]$ est un espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à n sur $\square$.

Définition de l' application $f:\square_{n+1}[x]\to\square_{n+1}[x]$ définie par $f(p(x))=p(x+1).$

$a)$ Montrer que f c'est une transformation linéaire.

$b)$ Trouver la matrice de f par rapport à la base $(u): u_0=1, u_1=x, u_2=x^2,\ldots,u_n=x^n.$

ANALYSE.

Résoudre le problème en utilisant une combinaison de méthodes:Démontrer l'application linéaire. *Trouver la matrice de l'application linéaire par rapport à une base.*

SOLUTIONS.

$a)$ Pour tout $p(x),q(x)\in\square_{n+1}[x], \alpha\in\square$:

$$f(p(x)+q(x))=f((p+q)(x))=(p+q)(x+1)$$
$$=p(x+1)+q(x+1)=f(p(x))+f(q(x)).$$
$$f(\alpha p(x))=(\alpha p)(x+1)=\alpha p(x+1)=\alpha f(p(x)).$$

Ainsi: f une transformation linéaire.

$b)$ Nous avons:

$$f(1)=1,\ f(x)=1+x,\ f(x^2)=1+2x+x^2,\ldots,\ f(x^n)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n.$$

Donc, la matrice de f dans la base (u) est: $A_{f/(u)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & C_n^0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^n \end{bmatrix}$

- **Problème 11.**

Sachant que: Si c'est $p(x)$ un polynôme caractéristique de matrice A $(A\in M_n(\square))$, alors $p(A)=0.$

$a)$ Calculer $f(A) = 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I_3$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$b)$ Calculez A^{-1}, avec la matrice A donnée dans la phrase $a)$.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode:*Trouver le polynôme caractéristique de la matrice.*

SOLUTIONS.

$a)$ En divisant le polynôme $f(x)$ par le polynôme caractéristique $p(x)$ on obtient:

$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$, où $r(x)$ est un polynôme de moindre degré n, on a:

$f(A) = p(A)q(A) + r(A) = r(A)$ (Parce que $p(A) = 0$)

Le polynôme caractéristique de A est: $p(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 2x + 1$

En divisant le polynôme $f(x) = 2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4$ par le polynôme $p(x) = x^3 - 2x + 1$.

On obtient: le polynôme restant $r(x) = 24x^2 - 37x + 10$.

Donc: $f(A) = r(\mathrm{A}) = 24A^2 - 37A + 10I$.

Parce que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi: $f(\mathrm{A}) = 24\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 27\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix}$

$b)$ Nous avons: $p(A) = 0 \Leftrightarrow A^3 - 2A + I = 0 \Leftrightarrow \left(-A^2 + 2I\right)A = I \Leftrightarrow A^{-1} = -A^2 + 2I$

Car $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ donc: $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- **Problème 12. .** (Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2014)

Sachant que: Si c'est $p(x)$ un polynôme caractéristique de matrice A $(A \in M_n(\mathbb{R}))$, alors $p(A) = 0$. Pour une matrice carrée $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Calculer A^{2014}.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant la méthode:*Trouver le polynôme caractéristique de la matrice.*

SOLUTIONS.

En divisant le polynôme $f(x)$ par le polynôme caractéristique, $p(x)$ on obtient:

$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$, où $r(x)$ est un polynôme de moindre degré n, on a:

$f(A) = p(A)q(A) + r(A) = r(A)$ (Parce que $p(A) = 0$)

Le polynôme caractéristique de A est: $p(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 3x - 10$

Effectuer une division $f(x) = x^{2014}$ par le polynôme $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ on a un polynôme restant: $r(x) = ax^2 + bx + c.$

Donc, nous avons: $x^{2014} = \left(x^3 - 6x^2 + 3x + 10\right)q(x) + ax^2 + bx + c \quad (1)$

$f(A) = A^{2014} = r(A) = aA^2 + bA + cI \quad (2)$

Puisqu'il $p(x)$ existe des solutions de 2, -1, 5, puis substituer $x = 2, -1, 5$ dans (1), on obtient:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^{2014} \\ a - b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 5^{2014} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5^{2014} - 2^{2015} + 1}{18} \\ b = \dfrac{6.2^{2014} - 5^{2014} - 12}{18} \\ c = \dfrac{5.2^{2014} - 5^{2014} + 5}{9} \end{cases}$$

D'après (2) on a donc:

$$A^{2014} = \frac{5^{2014} - 2^{2015} + 1}{18}.A^2 + \frac{6.2^{2014} - 5^{2014} - 12}{18}.A + \frac{5.2^{2014} - 5^{2014} + 5}{9}.I$$

- **Problème 13.**(Extrait de la propositiond'Olympiade de mathématiques étudiantes, 2017)

Pour matrice $$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & ... & 0 & 1\\ 0 & 0 & ... & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ 1 & 0 & ... & 0 & 0\end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

Prouver que la matrice A est diagonalisable. Trouver une P matrice inversible pour $P^{-1}AP$ être une matrice diagonale.

ANALYSE.

Résolvez le problème en utilisant une combinaison de méthodes: *Trouvez des vecteurs propres, des valeurs propres de la matrice, diagonaliser les matrices.*

GUIDE DES SOLUTIONS.

$a)$ Le polynôme caractéristique d'une matrice A est $P_A(\lambda)=(\lambda^2-1)^n$

Donc: A il y a deux valeurs propres: $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

- Pour $\lambda=1$, trouvez les n vecteurs propres comme suit:

$\alpha_1=(1,0,0,...,0,0,1),\alpha_2=(0,1,0,...,0,1,0),...,\alpha_n=(0,...,0,1,1,0,...,0)$.

- Pour $\lambda=-1$, trouvez n un autre vecteur propre:

$\beta_1=(-1,0,0,...,0,0,1),\beta_2=(0,-1,0,...,0,1,0),...,\beta_n=(0,...,0,-1,1,0,...,0)$.

- Donc: A la diagonalisation est possible et la matrice recherchée P a la forme:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & ... & 0 & -1\\ 0 & 1 & ... & -1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & ... & 1 & 0\\ 1 & 0 & ... & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Conclusion du chapitre 3.

Les résultats de ce chapitre ont prouvé que les méthodes de résolution de problèmes mathématiques que nous avons détaillées au chapitre 2 ont été appliquées de manière créative à la résolution des problèmes similaires et des problèmes l'examen Olympiade nationale de mathématiques pour les étudiants, ainsi que l'examen d'entrée en mathématiques pour le Master de Mathématiques. Normalement, la résolution d'un problème d'algèbre linéaire à l'Olympiade de mathématiques nécessite une combinaison flexible de nombreuses méthodes de résolution . C'est une bonne occasion d'aider les élèves à développer une pensée créative en apprenant à résoudre l'algèbre linéaire. *Cela montre l'utilité d'étudier des méthodes pour résoudre certains problèmes mathématiques typiques que nous avons présentés dans le chapitre 2 de la thèse.*

CONCLUSION DE LA THÈSE

Thèse "*Recherche sur les méthodes de résolution de certaines formes mathématiques typiques en algèbre linéaire"* a atteint les objectifs et les tâches fixés, en particulier la thèse a atteint les contenus suivants:

1. La thèse a systématiquement présenté les connaissances de base sur l'algèbre linéaire liées aux sujets suivants: Matrice, déterminant, système d'équations linéaires, espace vectoriel, application linéaire. Depuis lors, les méthodes de résolution de problèmes pour certaines formes mathématiques typiques doivent être étudiées.
2. La thèse a fourni un système riche de méthodes de résolution de problèmes pour chaque type de mathématiques typiques, ainsi que des problèmes illustratifs.
3. Les méthodes de résolution de problèmes ont été appliquées de manière créative pour résoudre des problèmes similaires et des problèmes avancés. Par conséquent, la thèse peut être utilisée comme référence pour améliorer les connaissances des étudiants universitaires dans l'étude de l'algèbre linéaire. Plus précisément, aider les élèves à identifier et à classer les problèmes pour trouver des solutions.

Les résultats de recherche de la thèse ont mentionné l'analyse nécessaire de la méthode de résolution pour chaque type de mathématiques pour aider les étudiants à la fois à comprendre la théorie et à connaître les compétences pratiques de résolution de problèmes. À partir de là, les étudiants peuvent faire preuve de créativité pour résoudre des problèmes similaires et avancés. A partir de cette étude, il peut ouvrir de nouvelles recherches sur les méthodes de résolution de problèmes pour d'autres types de mathématiques en algèbre linéaire, ainsi que dans d'autres domaines mathématiques tels que: les équations différentielles, l'analyse mathématique, la statistique mathématique,…

BIBLIOGRAPHI

1. Ngo Quoc Anh (2022).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam, 2022.* Université des sciences naturelles-Université nationale du Vietnam, Hanoi.
2. Tran Nguyen An (2014).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam, 2014*. Université Pham Van Dong.
3. Nguyen Thanh Chung (2018).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam, 2018*. Université Quang Binh.
4. Doan Trung Cuong (2019).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam, 2019.*Université de Nha Trang.
5. Doan Trung Cuong (2015).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam,2015.*Université d'économie, Université de Hue.
6. Tran Luu Cuong (2000).*Olympiade de mathématiques pour les étudiants, volume 2.*Maison d'édition d'éducation du Vietnam.
7. Tran Ngoc Danh (2002). *Algèbre linéaire*. Maison d'édition de l'Université nationale, Ho Chi Minh City,Vietnam.
8. Nguyen Viet Dong (2003). *Exercices d'algèbre linéaire*. Maison d'édition d'éducation du Vietnam.
9. Nguyen Tien Dung (2018).*Théorie et applications de l'algèbre linéaire*.Maison d'édition de l'Université nationale, Ho Chi Minh City, Vietnam.
10. Phung Ho Hai (2017).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam,2017*. Université de Phu Yen.
11. Phung Ho Hai (2016).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam,2016,* Université Quy Nhon.
12. Phung Ho Hai (2013).*Olympiades étudiantes de mathématiques du Vietnam,2013*. Université Duy Tan.
13. Bui Xuan Hai (2001). *Algèbre linéaire*.Maison d'édition de l'Université nationale, Ho Chi Minh City, Vietnam.
14. Nguyen Huu Viet Hung (2000).*Algèbre linéaire*.Maison d'édition de l'Université nationale du Vietnam, Hanoï.
15. Ngo Thu Luong (2000). *Exercices d'algèbre linéaire*. Maison d'édition de l'Université nationale, Ho Chi Minh City, Vietnam.
16. Nguyen Van Mau (2006).*Questions de l'Olympiade nationale de mathématiques pour les étudiants.*Maison d'édition d'éducation du Vietnam.
17. Phan Huy Phu (2002). *Exercices d'algèbre linéaire*. Maison d'édition de l'Université nationale du Vietnam, Hanoï.

18. My Vinh Quang (2005). *Matériel d'étude pour l'examen d'entrée au Master de Mathématiques*. Ho Chi Minh City University of Education - Vietnam.

19. Nguyen Tien Quang (2016). *Algèbre linéaire*.Maison d'édition d'éducation du Vietnam.

20. Hoang Xuan Sinh (2003*).Exercices d'algèbre linéaire*. Maison d'édition d'éducation du Vietnam.

21. Nguyen Van Sanh (2022).*Algèbre linéaire*.Universitaire de Hue - Vietnam.

22. Nguyen Duy Thuan (2014). *Algèbre linéaire*. Maisond'édition d'éducation du Vietnam.

23. Nguyen Duy Thuan (2002). *Exercices d'algèbre linéaire*. Maison d'édition de l'Université pédagogique - Vietnam.

24. Nguyen Dinh Tri (1999).*Mathématiques avancées, tome 1*.Maison d'édition d'éducation du Vietnam.

25. Dang Van Vinh (2017).*Algèbre linéaire avancée*.Maison d'édition de l'Université nationale, Ho Chi Minh City, Vietnam.

26. André Roberge (2016). *Algèbre Linéaire*.

27. Kevin Cheung, Mathieu Lemire (2018). *Algèbre Linéaire et application*.

28. Najib Mahdou (2022). *Introduction à l'algèbre linéaire*.

29. Schaum (1977). *Algèbre Linéaire*.

TABLE DES MATIÈRES